

Claudia Kilian

Muster der Menschheit

Claudia Kilian

Muster der Menschheit

Inspirationen zur Mathematik und zum Rechnen

Verlag Neckarwiese

Claudia Kilian, geboren 1961 in Birkenheide,
studierte Mathematik mit den Schwerpunkten
Technische Informatik und Physik an der FH Darmstadt.
Sie lebt und arbeitet in Weilburg und schreibt im Internet
an mehreren Blogs. Das Blog »Muster der Menschheit«
<http://mathebuch.wordpress.com> begleitet dieses Buchprojekt
mit zahlreichen aktuellen Linktipps und Hinweisen

Abbildung Cover: »multiverses« von Johanna Thompson

Lektorat: Annika Huhn
Satz: Michael Feuerer

Print on Demand, 2007
© Verlag Neckarwiese, Mannheim
Alle Rechte vorbehalten. Programm Verlag Neckarwiese
Druck: Digital Print Group GmbH, Erlangen
Printed in Germany
ISBN: 978-3-9811010-1-0

Inhalt

Widmungen	7
Einführung	9
Abgrenzung Rechnen und Mathematik	18
Formeln	20
Der mathematische Beweis	25
Rechnen mit Näherungswerten	28
Muster der Menschheit	30
Glauben und Mathematik	31
Kunst, Kultur und Mathematik	34
Mathematik und Malerei	36
Mathematik und Musik	38
Ethnomathematik	40
Schreckgespenster: Mengenlehre und Co.	43
Auch wir können Mathe!	45
Geschichte des alltäglichen Rechnens	50
Zahlen und Rechnen	51
Das kannst du dir an einer Hand abzählen – Zahlensysteme	53
Ziffern und Zahlen	54
Zyklische Abläufe	56
Geometrie	57
Die Entdeckung der Null und der Unendlichkeit	59
Geheimnisvolles Rechnen – Codierung	62
Kryptographie mit Öffentlichen Schlüsseln	64
Wahrscheinlichkeitsrechnung: und er würfelt doch	65
Hilfsmittel	69
Selbstvertrauen durch Rechnen	72
Gehirnforschung und Mathematik	75
Freude und Spaß am Lösen von Rätseln	78

Sicherheit durch Können	81
Kopfrechnen.	82
Schriftliches Rechnen und Prozentrechnung.	84
Der Dreisatz als Alleskönner	85
Der »gesunde Menschenverstand« –	
Einschätzen von Größenordnungen	87
Physikalisches Rechnen im Alltag	89
Statistik – die unterschätzte Macht	90
Zeitgenössische Mathematik	91
Mathematische Modelle	92
Mathematik in den Medien	94
Das Image der Mathematik.	96
Mathematik in der Literatur	99
Aktuelle Highlights der Mathematik.	101
Beweis des Satzes von Fermat	101
Poincarés Vermutung	102
Anwendungsgebiete der Mathematik.	104
Mathematik in der Wirtschaft –	
das Problem des Handlungsreisenden und anderes	104
Die Mathematik des Sozialverhaltens	105
Mathematik im Zitat	106
Anhang	108
Glossar	108
Mathematischer Anhang	110
Historischer Widerspruchsbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$	110
Satz von Fermat	111
Poincaré-Vermutung.	111
Danksagung.	112

Widmungen

Ganz herzlich widme ich dieses Buch:

Alexandra, die den Kampf mit der Buchführung schließlich doch gewonnen hat.

Benjamin, der sich der Mathematik von der physikalischen Seite her nähert.

Christoph, dem niemand etwas vorrechnen kann.

Dominik, in dem noch so viel Mathematik steckt, die entdeckt werden will.

Elisa, die ganz sicher keine Angst vor Mathe hat.

Frederik, der Zahlen schon von klein auf liebt.

Marcel, der das Rechnen von der sportlichen Seite angeht.

Einführung

*Die Mathematik hat eine große Macht,
weil wir Zahlen ein größeres Gewicht beimessen als Worten.*

(K. C. Cole – Das Universum in der Teetasse)

Wir leben in einem goldenen Zeitalter der Mathematik und die zeitgenössischen Leistungen sind sensationell. Seltsamerweise findet dieses goldene Zeitalter fast keinen Widerhall im allgemeinen Bewusstsein. So äußert sich Hans Magnus Enzensberger in seinem Essay »Zugbrücke außer Betrieb«. Die vielen Bemühungen von Universitäten, Hochschulen und anderen Institutionen, das Image der Mathematik zu verbessern und ihre Bedeutung im Alltag und in den unterschiedlichen Disziplinen hervorzuheben, gleichen die Vernachlässigungen der Vergangenheit nur allmählich aus. Die außergewöhnlichen Leistungen der letzten 20 Jahre in den verschiedenen Disziplinen der Mathematik fanden daher fast unter Ausschluss der Öffentlichkeit statt. Woran liegt das?

»Mathematik ist ein Fach mit 7 Siegeln. Entweder man versteht sie, weil man eine Begabung dafür hat, oder man versteht sie eben nicht.« Das ist die Ansicht vieler Menschen in unserem Kulturraum. Aber leider ist diese Sichtweise auch ein Anzeichen dafür, dass sich viele Menschen nicht weiter mit der Mathematik auseinandersetzen, weil sie sich für unbegabt halten. Seltsamerweise kommen die wenigsten Menschen auf den Gedanken, dass sie Musik nicht mögen und keinen Zugang zu ihr haben, nur weil sie keine Opernarien singen können oder nicht in der Lage sind, ein Gitarrensolo hinzulegen.

Dieses etwas andere Mathebuch versteht sich als ein Inspirations- und Lesebuch zum Thema Rechnen und Mathematik und regt dazu an, die eigenen – vielleicht verschüttet geglaubten – rechnerischen und mathematischen Fähigkeiten wieder auszugraben und ihnen im Alltag Beachtung zu schenken. Denn auch wenn uns der Gedanke ungewohnt ist: Alle Menschen besitzen eine mathematische Begabung. Das wird deutlich, wenn wir die Geschichte und die Herkunft der Mathematik betrachten. Das Buch wendet sich ganz besonders an alle, die in der Schule eher

auf Kriegsfuß mit der Mathematik gestanden haben. Durch die früher – und vielleicht noch heute – vorherrschende »Trichtermethode« mancher Mathematiklehrer ist vielen Menschen die Schönheit und Kreativität entgangen, die in der Mathematik steckt. Vielen Menschen ist nicht bewusst, dass die Mathematik ein grundlegender und vielschichtiger Bestandteil unserer Kultur ist. Das etwas andere Mathebuch will die Leserinnen und Leser durch den kulturellen und geschichtlichen Hintergrund der Mathematik inspirieren, ihre Neugierde wecken und sie bestärken, sich mit den Themen Rechnen und Mathematik in ihrem Alltag auseinanderzusetzen. Dazu wird immer wieder auf die alltägliche Sichtweise und den Gebrauch der Mathematik eingegangen.

Als Erwachsene betrachten wir die Mathematik und das Rechnen von einem etwas anderen Standpunkt aus als früher in der Schule. Wir sind in der Lage, diese neue Sichtweise zu nutzen und uns anregen zu lassen, um beim Rechnen und im Umgang mit der Mathematik mehr Sicherheit zu gewinnen. Wenn sich die Leserinnen und Leser darauf einlassen, werden sie erfahren, dass es sich um ein spannendes und unterhaltsames Thema handelt. Das Buch möchte sie auch ermutigen, ihr rechnerisches und mathematisches Selbstvertrauen zu stärken, indem sie ihre Fähigkeiten trainieren und sich mit den mathematischen Problemen beschäftigen, die ihnen im Alltag begegnen.

Rechnen im Kopf, mit Stift und Papier oder, wie wir später sehen werden, auch mit den Fingern und mit Hilfsmitteln wie dem Abakus, einem Rechenbrett, oder mit dem Rechenschieber, ist eine beachtenswerte kulturelle Leistung, mit der die Menschheit ihren Weg zum abstrakten Denken einleitete. Rechnen ist ein Handwerk, auf das Menschen verschiedenster Kulturen seit 20 000 oder vielleicht sogar 30 000 Jahren im Alltag vertrauten, wie man anhand des berühmten Knochens von Ishango sieht. Dieser ca. 10 cm große Knochen enthält Einritzungen, die sich in drei Spalten gruppieren und deren mathematische Logik von verschiedenen Wissenschaftlern untersucht wurde. So lange begleiten mathematische Gedanken die Menschen bereits in ihrer Entwicklungsgeschichte.

Auch wenn wir die Mathematik in unserem Alltag nicht immer auf Anhieb erkennen, weil sie uns in den unterschiedlichsten Kostümen und

Masken begegnet. Sie ist und bleibt dennoch mitten unter uns. Sie zieht sich durch unser soziales und wirtschaftliches Leben, genauso wie durch die Technik, Medizin und andere Wissenschaften. Sie lässt die Musik nicht unberührt, nicht die Kunst und schon gar nicht die Philosophie. Selbst im Glauben und in der Religion spiegelt sich die Mathematik wider.

Ob ernst oder unterhaltsam, ob im Vordergrund oder eher am Rande: Mathematik zieht sich wie ein roter Faden durch die Geschichte der Menschheit. Sie ist eine große Herausforderung für den menschlichen Geist und eine routinierte alltägliche Tätigkeit. Sie ist Freizeitbeschäftigung und Schüleralptraum. Nur eins ist sie auf keinen Fall: langweilig und uninteressant.

Sind wir in Übung, dann ist unser Denken beweglich und klar. Wenn wir diese Fertigkeit besitzen, beschäftigen wir uns konzentrierter mit den logischen Strukturen und ziehen folgerichtige Schlüsse instinktiv und unbelastet von mühseligen Rechenwegen. Es macht uns Spaß, wenn wir spüren, dass unser Denkvermögen gefordert wird und wir unsere Fähigkeit verbessern, Probleme zu analysieren und zu lösen. Anhänger der mathematischen Rätsel kennen den entspannenden und beruhigenden Nebeneffekt schon lange, einen »klaren Kopf« zu bekommen.

Warum ist es für eine moderne Gesellschaft wichtig, dass sich die Menschen mit Mathematik beschäftigen? Können wir das nicht den Mathe-Genies überlassen? Im Alltag ist die angewandte Mathematik gut versteckt. Obwohl sie unser tägliches Leben durchdringt, findet sie eher hinter den Kulissen statt. Kommt der durchschnittliche erwachsene Mensch nicht auch gut ohne sie durch das Leben? Ich meine nicht. Den Menschen ist es nicht möglich, ihr Wissen und ihre handwerklichen und technischen Möglichkeiten auf genetischem Weg weiterzuvererben. Sie haben sich einen anderen Weg dafür gesucht: die Bildung. Zu der heutigen Überlebensstrategie der Gattung Mensch gehört auch die Fähigkeit, lebenslang neues Wissen und neue Fertigkeiten zu erwerben. Neben dem mündlichen und schriftlichen Umgang mit der Sprache ist die Mathematik und ein allgemeines Verständnis für die mathematischen Methoden die Grundlage für diese Fähigkeit. Deshalb begleiten uns das Rechnen und die Mathematik seit unseren ersten Schultagen. Wir kommen ohne sie nicht aus. Wer es

versucht, steht abseits, denn heute gilt Mathematik als eine Schlüsseltechnologie der Zukunft. Mathematik wird einerseits als schwieriges Werkzeug verstanden, das es zu beherrschen gilt, wenn wir einen der hoch angesehenen technischen Berufe ergreifen wollen. Andererseits stoßen wir in vielen alltäglichen Lebenssituationen auf Mathematik und Rechnen, und als verantwortungsbewusster, eigenverantwortlicher Mensch tun wir gut daran, uns nichts von anderen vorrechnen zu lassen.

Wir verdanken der Mathematik aber ebenso unterhaltsame Freizeitbeschäftigungen wie den legendären Zauberwürfel der achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts oder das zurzeit so trendige Sudoku, das Zahlenrätsel aus Japan. Zu zeigen – wie es die Deutsche Mathematiker-Vereinigung beschreibt –, dass Rechnen und Mathematik nützlich und faszinierend zugleich sind, ist eines der Ziele dieses Buches, aber wir werden auch sehen, dass die Mathematik ein großes, unvollständiges Gebäude ist, an dem viele Erbauer stetig weiterarbeiten. Mathematik ist nie fertig und abgeschlossen, sondern entwickelt sich vor dem Hintergrund der herrschenden kulturellen Lebensumstände und des jeweiligen Zeitgeists stets weiter.

Alle, die Mathematik für trocken halten, erinnere ich daran, dass die durch die Evolution hervorgebrachte Fähigkeit der Menschen, abstrakt zu denken und mathematische Techniken zu entdecken und anzuwenden, genau die Fähigkeit ist, die es ihnen möglich gemacht hat, in Symbolen Bedeutungen zu erkennen. Für die Menschen der Vorzeit veränderte sich mit der Entwicklung dieser Fähigkeiten das Erleben ihrer natürlichen Umwelt. Plötzlich erlebten sie eine Natur, die »beseelt« war. Sie erkannten Gesichter in Wolken, Bergformationen und Bäume hatten auf einmal eine Statur, Tiere strahlten Charaktereigenschaften aus und wurden als Persönlichkeiten gesehen. Mythen, Märchen und Religionen entstanden, als die Menschen begannen, Vergleiche zu ziehen sowie Muster zu deuten und zu interpretieren. Aus dem Bedürfnis, diesen Mustern Informationen über Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft, über die Natur oder über die Beziehungen zu entlocken, ist das menschliche Interesse an der Mathematik entstanden. Vielleicht sogar die Fähigkeit überhaupt, Mathematik zu betreiben. Durch Aneignen und Weitergeben spezieller

Denkmuster, durch Traditionen und Riten begannen die Menschen, sich ihre kulturelle Umwelt zu erschaffen. Mythen, Religionen, Geschichten, Philosophien und eben auch mathematische Vorstellungen gehörten unmittelbar dazu.

Ziel dieses Buches ist es, mehr Menschen an diese vergessene Welt heranzuführen. Es geht zunächst der Herkunft der Mathematik auf den Grund und verfolgt ihre Spuren von der Frühgeschichte an und durch die unterschiedlichsten Kulturen. Die beiden Themengebiete »Glauben und Mathematik« und »Kunst, Kultur und Mathematik«, die im Kapitel »Muster der Menschheit« behandelt werden, zeigen dem Leser diese verschiedenen Wurzeln der Mathematik. Hier zeigt sich, welchen Einfluss die Mathematik auf Kunst, Kultur und Religion besitzt und wie sich die Rechenkünste der Menschen über Generationen verfeinerten. Dabei wird ganz besonders deutlich, dass die Mathematik eine entdeckende Wissenschaft ist. Jeden Tag wird Neues entdeckt, ohne dass wir das Alte aufgeben müssen – höchstens unsere alten Denkgewohnheiten.

Im Kapitel »Geschichte des alltäglichen Rechnens« geht es um das Kernthema dieses Buches: den mathematischen Alltag. Hier werden die verschiedenen Techniken zu einfachen Bereichen wie den Grundrechenarten und der Geometrie betrachtet. Gleichzeitig fallen in diesen Bereich auch kompliziertere Techniken, wie etwa die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder die Codierung.

Das Kapitel »Selbstvertrauen durch Rechnen« ist dem Selbstbewusstsein des Lesers in seine mathematischen Fähigkeiten gewidmet. Leider trauen sich viele Menschen in unserem Kulturkreis auf diesem Gebiet nicht viel zu. Dazu trägt auch der bereits erwähnte und weit verbreitete Irrglauben bei, man müsse eine besondere Begabung für Mathematik haben, um sie zu verstehen und anzuwenden. Aber das Geheimnis der Mathematik besteht – wie so viele andere Bereiche des Lebens – aus Freude und Spaß, Disziplin beim Lernen des Handwerks, um Sicherheit in der Technik zu bekommen, und ein paar kleinen Tricks. Das Vertrauen in die eigenen mathematischen und rechnerischen Fähigkeiten ist sehr leicht zu stärken, wenn wir davon überzeugt sind, es wirklich lernen zu können. In diesem Kapitel werden dazu ein paar Anlässe genannt.

Das Kapitel »Zeitgenössische Mathematik« vermittelt den Leserinnen und Lesern einen Überblick über die traditionellen Gebiete der höheren Mathematik, dem ein Ausblick auf die aktuellen »Highlights« der Mathematik folgt. Das Buch schließt mit einigen inspirierenden Zitaten über und von Mathematikern.

Es gibt eine Reihe von Mathematikbüchern, die uns versprechen, dass sie uns unterhalten werden und dass Mathematik so einfach ist! Zwei Seiten Einführung voller Elan und Enthusiasmus des Autors – denn Mathematiker sind ungeheuer fasziniert von ihrem Fachgebiet – dann geht es los und spätestens auf Seite sieben werden wir wieder allein gelassen, und der Autor galoppiert allein durch das Reich der kürzesten Wege, Kombinationen oder färbt seine Landkarten ein. Solche Begeisterung verbreitenden Mathematiker bleiben allein, denn wir können ihrem Denken nicht lange folgen. Ein anderer, tatsächlich unterhaltsamerer Ansatz veranschaulicht Mathematik durch Objekte und Spiele. Für einen kurzen Moment meinen wir sie zu erhaschen, die Ahnung, was der Zauber ist. Der Trick. Aber was bleibt übrig?

Dieses Buch sucht sich einen anderen Weg. Es inspiriert die Leserinnen und Leser, sich die Mathematik und das Rechnen aus den unterschiedlichsten Blickwinkeln anzusehen und ermutigt sie, sich ihr auf einem persönlichen und alltäglichen Niveau zu nähern. Wenn wir uns mit der Mathematik auseinandersetzen, wenn wir ihr Wesen erfassen und von ihrer Klarheit profitieren wollen, dann ist es eine gute Strategie, sie in unserem persönlichen Alltag anzunehmen. Dann können wir die Beispiele, die Hintergründe, die Schwächen, die Kuriositäten der Mathematik aufspüren, ihre Probleme aufdecken und sie mit unseren Sinnen nachempfinden.

Wie bei allen Themengebieten ist es dabei hilfreich, etwas mehr über die geschichtlichen und kulturellen Hintergründe der Mathematik zu erfahren. Denn wie bereits oben erläutert, beruht unser aktuelles Wissen immer auf einer weitergegebenen Wissens- oder Bildungskette. Wird die Kette unterbrochen, müssen wir alle von vorn beginnen. Die kulturellen Hintergründe zeigen uns die Umgebung, in der wir uns befinden. Dazu kommen noch unsere persönlichen Fähigkeiten und Kenntnisse auf die-

sem Gebiet – das »Ballgefühl«, wie die Fußballer es nennen würden. In der Mathematik und beim Rechnen ist dieses Ballgefühl das Gespür für Zahlen, Muster und Formeln. Wie bei der körperlichen Fitness erhalten wir es nur durch tägliches regelmäßiges Training. Ein Buch kann der Auslöser für eine intensivere Beschäftigung mit der Mathematik sein. Es kann uns inspirieren, aber wir müssen uns selbst fit machen. Übung und Disziplin bringen wir selbst ein. Der Umgang mit Zahlen und Formeln setzt viel Übung voraus. So wie ein Schreiner nach mehreren Berufsjahren auf Anhieb sieht, wenn eine Holzleiste 8,3 cm und nicht 8,6 cm breit ist, so lernen wir nach einiger Zeit, mit Zahlen und Formeln umzugehen. Wir bekommen ein »Auge« für Zusammenhänge, Regeln und Fehlerquellen.

Wir erhalten ein lebendiges, kreatives Wissen, wenn wir dabei dort ansetzen, wo wir uns am meisten auskennen: in unserem eigenen Alltag.

Das Online-Lexikon Wikipedia beschreibt das mathematische Verständnis als eine Kombination aus Abstraktionsvermögen, konsequent logischem Denken, Kreativität und Intuition. Es bedarf vielleicht etwas Überwindung und Übung, um unsere verschütteten mathematischen Fähigkeiten wieder hervorzuholen. Wenn wir die ersten kleinen Erfolge erleben, dann werden wir Spaß dabei haben. Dieses Buch weckt die Lust dazu, sich mehr mit der »Alltagsmathematik« zu beschäftigen. Sie aufzuspüren im eigenen Alltag und sich nicht nur von »Tricks« faszinieren lassen, die gerade noch so einleuchtend waren und sich dann schon wieder unserem Verständnis entziehen. Es soll neugierig darauf machen, die »Schönheit und Eleganz« der Mathematik zu entdecken, die die Mathematiker so innig empfinden, und es soll Mut machen, sich auf eigene Faust auf das Abenteuer Mathematik einzulassen. So wie wir in anderen Gebieten unsere Vorlieben haben, werden wir in der Mathematik unseres Umfelds interessante und langweilige Bereiche finden. Lassen wir uns Zeit, unsere mathematischen Vorlieben und unser Talent zu entdecken, dann warten Spaß, Freude und Vergnügen auf uns. Aber wo versteckt sie sich im Alltag? Wo stoßen wir auf sie?

Um zu zeigen, dass das Rechnen einen praktischen Bezug hat, werden in der Schule ein paar wenige physikalische Beispiele als Beleg heran-

gezogen. Allerdings oft mit dem kleinen »Schönheitsfehler«, dass sehr viele Rahmenbedingungen unbekannt bleiben, die sich in unscheinbaren Konstanten oder Variablen verstecken, die mit 6–9 Kommastellen angegeben werden. Wo ist er, der praktische Bezug der Mathematik, fragen wir uns manchmal – und dazu fällt uns ein, dass wir mit dem Errechnen einer trivialen Summe einen Überblick über unsere Besitztümer erhalten. Wir zählen und dokumentieren unser Eigentum. Die ältesten Schrifttafeln sind steinerne Dokumente, auf denen Besitz gezählt wurde: Ziegen, Schafe oder die Ernte, die in einem Speicher gelagert wurde.

So begann es mit dem Rechnen und so weit ist es für jeden von uns nachvollziehbar. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen, also den Zahlen 1, 2, 3 usw., fällt uns am leichtesten. Und aus der Nachvollziehbarkeit der natürlichen Zahlen übertragen wir sofort die negativen Zahlen, d. h. die Zahlen mit einem Minuszeichen, in Schulden.

Sobald es an die Zinsrechnung geht, machen die ersten von uns bereits halt. Unser Zahlengefühl lässt uns schon bei kleinen Zinsrechnungen im Stich und weil das so ist, nehmen wir uns den Zinssatz und behandeln ihn so, als hätten wir ein Zahlengefühl – und ab dem Zinseszins lassen wir uns ganz schön was vorrechnen. Langweiliges stupides Rechnen ist nicht unsere Sache – wer hat schon Lust auf Zahlen?

Vielleicht haben einige Leserinnen und Leser dieses Buches nach dem Lesen Lust auf Zahlen, Lust auf Formeln und Lust auf Rechnen und Mathematik.

In diesem Buch gehen wir zunächst der Herkunft der Mathematik auf den Grund und verfolgen ihre Spuren von der Frühgeschichte zu den unterschiedlichen Kulturen. Wir sehen welchen Einfluss die Mathematik auf Kunst, Kultur und Religion besitzt und wie sich die Rechenkünste der Menschen über Generationen verbesserten und verfeinerten. Danach werden ein paar Anstöße und Anlässe aufgeführt, die als Ermunterung dienen können, wie wir das eigene Selbstvertrauen in unsere mathematischen und rechnerischen Fähigkeiten stärken. Beendet wird das Buch mit einem Überblick über die traditionellen Gebiete der höheren Mathematik und einem Ausblick auf die aktuellen »Highlights« der Mathematik.

Infobox – Einführung

Literatur

K. C. Cole: »Das Universum in der Teetasse«

ISBN: 978-3-7466-8080-4

Ein unterhaltsames populärwissenschaftliches Sachbuch über verschiedene mathematische Theorien.

Keith Devlin: »Das Mathe-Gen«

ISBN: 978-3-423-34008-3

Ein Klassiker, der sich mit der Entwicklung des mathematischen Denkens beschäftigt.

Hans Magnus Enzensberger: »Der Zahlenteufel«

ISBN: 978-3-423-62015-4

Das Kinderbuch mit dem wunderschönen Untertitel »Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben« enthält Zeichnungen von Rotraut Susanne Berner. Es hat den Preis der Stiftung Buchkunst erhalten und ist mit 11,50 Euro außerdem ein sehr preisgünstiges Buch.

Museum

Das Mathematikum in Gießen ist das erste mathematische Mitmach-Museum der Welt. Aktuelle Öffnungszeiten und Preise erfährt man im Internet unter <http://www.mathematikum.de>

Weblinks

<http://www.mathematik.de>

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

Ein vielseitiges und aktuell gehaltenes Internetportal für mathematisch interessierte Menschen.

<http://www.gefilde.de/ashome/denkzettel/denkzettel.html>

Die Denkkästchen von Alfred Schreiber sind ein wahres Schatzkästchen an mathematischen Weisheiten.

Abgrenzung Rechnen und Mathematik

*Die Furcht vor der Mathematik steht der Angst
erheblich näher als der Ehrfurcht.*

Felix Auerbach

Dieses Buch beschäftigt sich ausdrücklich mit dem Rechnen und mit der Mathematik. Denn das Rechnen ist in unserem Alltag derjenige Teil der Mathematik, mit dem wir am meisten in Berührung kommen. Umgangssprachlich werden die Begriffe Rechnen und Mathematik oft synonym verwendet. Aber es gibt viele Mathematiker, die Rechnen nicht zur Mathematik zählen, höchstens zur angewandten Mathematik. Viele Mathematiker sind keine besonders guten Rechner. Sie meinen, Mathematik sei dazu da, sich das Rechnen zu ersparen und versuchen, größere Rechnungen durch eine Überlegung zu ersetzen. Damit beide Begriffe besser unterschieden werden können, sehen wir uns die beiden Begriffsdefinitionen genauer an und nehmen dafür das Online-Lexikon »Wikipedia« zu Hilfe.

Der Ursprung des Wortes Rechnen leitet sich von dem indogermanischen »reg« ab. Dies bedeutete *»etwas in Ordnung bringen«* und bezog sich darauf, dass durch Zählen Eigentum bestimmt und zugeordnet werden konnte. Heute versteht man darunter die Anwendung der vier Grundrechenarten, das Bruchrechnen und die Prozentrechnung. Die elementarsten mathematischen Tätigkeiten sind Zählen, Vergleichen, Ordnen und Klassifizieren.

Die Wurzel des Wortes Mathematik liegt im Griechischen und bedeutet *»die Kunst des Lernens«*. Wir alle sind seit dem ersten Schuljahr mit Mathematik konfrontiert, und irgendwie wissen wir alle, was mit »Mathe« gemeint ist. Aber verblüffenderweise gibt es keine allgemein anerkannte Definition der Mathematik. Sie ist die Wissenschaft, die aus der Untersuchung von Figuren und Zahlen entstanden ist. Sie umfasst zahlreiche Teilgebiete, von denen hier nur einige aufgezählt werden sollen: das Rechnen mit Zahlen (Arithmetik), die Untersuchung von Figuren (Geometrie), die Untersuchung der korrekten Schlussfolgerungen (Logik), das Auflösen von Gleichungen (Algebra), Untersuchungen zur Teilbarkeit (Zahlentheorie),

das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (Stochastik), die Untersuchung von Funktionen, insbesondere deren Wachstum, Krümmung, dem Verhalten im Unendlichen und der Flächeninhalte unter den Kurven (Analysis).

Die Mathematik liefert also den theoretischen, wissenschaftlichen Hintergrund, während das Rechnen den Umgang mit den Zahlen nach den festgelegten Regeln bezeichnet. Keith Devlin formuliert in seinem Buch »Das Mathe-Gen« die Vermutung, dass die meisten Mathematiker mit der Antwort »Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern« übereinstimmen würden. Dabei handelt es sich nur zu einem Teil um reale Muster, zu einem anderen Teil um abstrakte, symbolische Muster. Warum ist das Erkennen von Mustern und Ordnung für uns Menschen von so großer Bedeutung? Wenn wir ein Muster oder eine Ordnung wahrnehmen und beschreiben können, brauchen wir nicht mehr die gesamte komplexe Information verarbeiten, sondern wir können uns auf eine kurze Information konzentrieren. Wir komprimieren die notwendige Information, d. h. wir können beispielsweise die Bewegungsgesetze anwenden und müssen nicht alle Orte und Geschwindigkeiten notieren, um den Aufenthalt eines Objektes angeben zu können. Wenn wir den Lauf der Sonne während eines Jahres kennen, wissen wir, dass es günstige Sonnenstände für Aussaat und Ernte gibt. Durch die biologische Evolution hat sich die Fähigkeit des Menschen, Muster zu erkennen, immer weiter ausgebildet. Mit der Weiterentwicklung des Gehirns war eine stetige Verbesserung dieser Fähigkeit verbunden, und viele kulturelle Riten und Gebräuche dienten dazu, diese Fähigkeit zu stärken und bestimmte Denkmuster zu prägen und weiterzugeben. Musik, Tanz und Kunst, frühe Religionen, Rhythmus und Melodie – alle diese Kulturtechniken zeugen von dem Talent der Menschheit zur Mustererkennung und Musterverwertung.

Die Mathematik wird oft zu den Naturwissenschaften gezählt. Streng genommen ist sie selbst aber keine Naturwissenschaft. Sie ist die »Sprache«, mit der wir uns der Natur nähern. Sie besitzt sowohl ein geistes- als auch ein naturwissenschaftliches Gesicht. Mit ihren Symbolen und Gesetzen beschreiben wir die Natur und die in ihr ablaufenden Prozesse. Wir erstellen mit ihrer Unterstützung theoretische Modelle und erhalten so Antworten auf unsere Fragen. Dennoch ist die Mathematik an

sich ein theoretisches Gebäude; eine Denkstruktur, die mit strengen Regeln errichtet wurde. Während andere Wissenschaften Vermutungen, d. h. Hypothesen aufstellen und anhand von Messungen, Statistiken oder Zahlen feststellen, ob diese Vermutungen wahr sind, ist das Ziel in der Mathematik der mathematische Beweis, der durch logische Schlüsse – ausgehend von wenigen Grundaussagen, den so genannten Axiomen – erbracht wird. Während wir in den anderen Wissenschaften immer damit rechnen müssen, dass wir eine bisher gültige Theorie eventuell verwerfen müssen, wenn wir neue Erkenntnisse gewinnen, haben die Beweise der Mathematik eine ewige Gültigkeit. Alles, was einmal korrekt bewiesen wurde, ist auch nach tausend Jahren noch gültig. Wir erweitern das Gebäude der Mathematik also von Jahr zu Jahr. Ein Nachteil dieses stetig wachsenden Gebäudes ist, dass die Spezialgebiete der Mathematik immer umfangreicher werden. Am Beispiel der letzten beiden spektakulären Beweise – den 1993 erbrachten Beweis des Satzes von Fermat durch den britischen Mathematiker Andrew Wiles (*1953) und den 2002 veröffentlichten Beweis der Poincaré-Vermutung des russischen Mathematikers Grigori Perelman (*1966) – erkennen wir aber, dass es heute sehr lange dauert, bis ein Beweis von genügend anderen Mathematikern überprüft werden kann. So wurden noch nach der Ernennung von Perelman für die Verleihung der Fieldsmedaille in den Medien vorsichtige Formulierungen gewählt, um die Arbeiten von Grigori Perelman einzuordnen: »Im Jahr 2006 festigte sich die Meinung der Fachwelt, dass der Russe Grigori Perelman die »Poincare-Vermutung«, seit rund 100 Jahren eines der größten Probleme der Mathematik, gelöst hat.«

Formeln

Im Film oder in der Unterhaltungsliteratur bedeutet der Besitz der Formel gleichzeitig den Besitz der Macht. Meist bleibt ihre Zusammensetzung mysteriös und geheimnisvoll. Wer sie besitzt, kann die Welt vernichten oder retten. Diese Vorstellung übertragen viele Menschen auch in der

realen Welt auf mathematische Formeln. Sie belegen sie mit einer Aura des Unerklärlichen und Unergründlichen. Aber der objektive Hintergrund der Formel ist gerade das Gegenteil. Die Formeln sind die Sprache der Mathematik, mit der wir Aussagen und Folgerungen klar ausdrücken können. Sie sind nichts weiter als eine Anleitung, um etwas auszurechnen.

Wenn sich etwa ein Italiener mit einem Russen unterhält, müssen sich die beiden, um sich verständigen zu können, auf eine Sprache einigen. In der Mathematik entwickelten die Menschen für diesen Zweck im Laufe der Jahrhunderte die Formelsprache. Im Gegensatz zu den gesprochenen und geschriebenen Sprachen sind heute viele mathematische Theorien universell, wir verstehen sie weltweit. Sie dienen der Darstellung unserer mathematischen Aufgabenstellungen und erleichtern die Dokumentation des Lösungswegs. Und doch sind die Formeln oftmals der Grund, warum so viele Menschen eine große Hemmung vor der Mathematik haben. Stephan Hawking schreibt in seinem Bestseller »Eine kurze Geschichte der Zeit«, dass sein Verleger ihn warnte, die Verkaufszahlen seines Buches würden sich mit jeder weiteren Formel reduzieren. Hawking verzichtet also auf alle Formeln außer $E=mc^2$ und schrieb ein anschauliches und spannendes Buch über die Physik und die Entstehung des Universums. Warum machen wir es nicht wie Hawking und lassen die Formeln einfach weg?

Hawking erklärt in seinem Buch komplizierte physikalische Theorien auf anschauliche Weise. Er vereinfacht dabei und verwendet ansprechende Bilder und Beispiele. Aber seine gesamte Theorie basiert auf mathematische Ansätze und Lösungen, die er seinen Fachkollegen streng mathematisch »bewiesen« hat. Denn sonst wären seine schönen Bilder und Beispiele nur Fantasiegespinste, und kein Forscherteam käme auf den Gedanken, durch teure Messungen und physikalische Experimente die Vorhersehbarkeit seiner Theorie zu bestätigen. Wir begnügen uns mit der Anschaulichkeit der Theorien, weil wir diese mathematischen Beweise nicht so einfach nachvollziehen können. Aber die Formeln in unserer Alltagswelt können wir verstehen, wenn wir uns von unseren Hemmungen befreit haben. Wenn wir die praktischste und pragmatischste Art der »Zahlenmystik« – die Formeln und ihre Anwendung – verinnerlichen,

indem wir uns mit den verwendeten Symbolen und Verallgemeinerungen vertraut machen, lernen wir die »Sprache der Mathematik« kennen und somit auch schätzen.

Die Möglichkeit, logische Zusammenhänge in Formeln auszudrücken, hat viel zur Entwicklung der Mathematik und damit der Menschheit beigetragen. Die Formelsprache der Mathematik ist keine Geheimsprache, sondern erhöht im Gegenteil die Klarheit. Auch wir sind in der Lage, uns mit Formeln auseinanderzusetzen. Dieses Buch hat das Anliegen, die Angst vor der Mathematik zu nehmen und die Leserinnen und Leser von der Nützlichkeit und der Faszination des Rechnens zu überzeugen. Obwohl das Buch mit wenigen Formeln auskommt, wäre es ohne den Hinweis, dass die Verwendung von Formeln und Übung im Umgang mit ihnen zu den Grundlagen der Mathematik gehört, kein ehrliches Unterfangen.

Einige Bücher begnügen sich damit, die Anschaulichkeit der Mathematik darzustellen. Diese Anschaulichkeit ist in der Mathematik eine wichtige Hilfe. Aber sie ist eben nur eine Seite. Sie ist ein Symbol, eine Vereinfachung, die uns beim Denken hilft. Dahinter steht immer die Überprüfung der Theorie durch die Formel oder die Anwendung der allgemeinen Formel auf das Beispiel. Denn es gibt nichts Praktischeres als eine Theorie, die wir einmal verstanden haben und dann in den verschiedensten Situationen anwenden können. Dazu gehört ebenso das Verständnis wie auch die nötige Übung. Wenn wir damit ernsthaft anfangen, werden wir sehr bald spüren, dass die Beschäftigung mit der Mathematik auch Auswirkungen auf unsere Persönlichkeit hat. Das Lösen schwieriger Aufgaben verlangt von uns zunächst eine große Frustrationstoleranz. Wir müssen uns hineinknien und dürfen nicht die Geduld verlieren. Aber bald haben wir die ersten Erfolge und damit stärkt sich auch unser Selbstvertrauen.

Um uns die Nützlichkeit und Vielseitigkeit der Formeln vor Augen zu halten, genügt es, wenn wir in der Zeit einfach zurückgehen. Wenn wir uns hineinversetzen in eine Zeit, in der es keine Formeln gab. Auch da standen Menschen bereits vor Rechenaufgaben, die sie gut und gerecht lösen wollten.

In der babylonischen Zeit musste ein Schreiber diese Aufgabenstellung berechnen können:

Wie viel Getreide muss vorhanden sein, um ein Bauwerk errichten zu lassen, wenn die erforderliche Anzahl von Tagen für diesen Bau und die Tagesration eines Arbeiters bekannt ist?

Die Lösung der Aufgabe muss durch einen umfangreichen Text beschrieben werden. Ich empfehle den Leserinnen und Leser einmal ernsthaft den Versuch zu machen, eine solche Aufgabe schriftlich und damit überprüfbar zu lösen. Es ist schnell zu erkennen, wie aufwendig dieses Verfahren ist. Bei komplizierten Aufgabenstellungen verliert man schnell den Überblick über den Rechenweg. So war es später eine Erleichterung, dass die Menschen die Lösung der Aufgaben nicht mehr durch einen umfangreichen Text beschreiben mussten. Die Mathematiker einigten sich auf eine verkürzte Schreibweise, die Formeln. Jede Formel steht für eine Vereinbarung, die einmal getroffen wurde. Wenn wir die Formel nicht verstehen, dann ist es sinnvoll, wenn wir einen Schritt zurück gehen und uns die Vereinbarung noch einmal genauer ansehen. In diesem Buch werden wir das an einigen Stellen gemeinsam tun.

Wie schwierig es ist, ohne Formeln eine logische Überlegung fortzuführen, erleben manche Schüler, wenn sie immer wieder daran scheitern, eine Textaufgabe zu lösen, weil die »Übersetzung« der umgangssprachlichen Aufgabenstellung in die Formelsprache misslingt.

Die ersten Formeln verwendete der griechische Mathematiker Diophantus von Alexandria ca. 250 n. Chr. in seinem Lehrbuch *Arithmetica*. Er verwendete Symbole wie zum Beispiel das Gleichheitszeichen, dessen Verwendung sich aber erst sehr viel später durchsetzte. Die Zeichen + und – für die Addition und die Subtraktion entstanden im Mittelalter im kaufmännischen Umfeld. Die mathematische Formelsprache entwickelte sich parallel zu der Ausweitung des mathematischen Wissens. Als die Differential- und Integralrechnung von dem deutschen Universalgelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und dem englischen Philosophen und Mathematiker Isaac Newton (1643–1727) unabhängig voneinander ausgearbeitet wurden, entwickelten beide Wissenschaftler auch Möglichkeiten, wie die neuen Erkenntnisse in geeigneter Weise in die Formelsprache übernommen werden konnten.

Aber wie kommt man zu einer mathematischen Formel? Mathematische Formeln werden auf unterschiedliche Weise hergeleitet. Zunächst einmal entstehen sie aus Axiomen, den grundlegenden Annahmen, aus denen sie logisch hergeleitet werden. Hat man auf diese Art eine Formel hergeleitet, kann man aus ihr weitere logische Folgerungen ziehen und erhält immer wieder andere Formeln. Eine ganz andere Vorgehensweise, eine Formel zu erhalten, sehen wir bei der Modellbildung. Dabei werden, ähnlich wie in der Physik, Gesetzmäßigkeiten beobachtet und festgehalten, diese dann in einem Experiment oder auch durch empirische (statistische) Vergleiche untersucht und schließlich in einer mathematischen Formel ausgedrückt.

Viele praktische Problemstellungen lassen sich als Gleichungen formulieren. Bei Optimierungsaufgaben entspricht die Gleichung z. B. einer Nullstellenberechnung eines Graphen. Der schwierigste und aufwändigste Teil der Aufgabe besteht in vielen Fällen darin, eine mathematische Gleichung zu finden, die die praktische Problemstellung möglichst gut beschreibt. Was das genau bedeutet, wird im Abschnitt zur Aufstellung mathematischer Modelle, auch Modellierung genannt, erläutert.

Ob Theorie oder Anwendung der Regeln, lassen wir uns inspirieren, uns mit den Formeln zu beschäftigen, wann immer sie uns in unserem Alltag begegnen. Wenn wir erst einmal aufgehört haben, immer darüber hinweg zu blättern oder weiter zu klicken, dann werden wir die Eleganz und die Schönheit erkennen, von der die Mathematiker so häufig sprechen.

Zum Schluss des Kapitels sollen noch zwei außergewöhnliche Formeln der Mathematik vorgestellt werden:

Die schönste Formel: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Diese Formel wurde von Mathematikerinnen und Mathematikern als eindeutig schönste Formel ausgewählt. Die Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* veranstaltete vor einigen Jahren eine Umfrage dazu. Einstimmig erreichte dabei die von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) entdeckte Formel den Spitzenplatz.

Sie verbindet nicht nur die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik (die drei Einheiten 0, 1 und i [die Wurzel aus -1], dazu π und die Eulersche

Zahl e), ebenso wie die drei wichtigsten mathematischen Operationen: die Addition, die Multiplikation und die Potenz, sondern fasziniert die Mathematikerinnen und Mathematiker auch durch ihre praktische Bedeutung. Beispielsweise eröffnet sie neue Anwendungsmöglichkeiten durch die Verbindung der Differentialrechnung mit dem komplexen Raum.

Die berühmteste Formel: $E = m \times c^2$

Diese Formel $E=mc^2$ ist die wohl berühmteste physikalische Formel. Sie wurde von dem Physiker Albert Einstein (1879–1955) aufgestellt und beschreibt, wie viel Energie die Umwandlung eines Körpers einer bestimmten Masse erzeugen würde. c beschreibt in dieser Formel die Lichtgeschwindigkeit. Für viele Menschen ist es auch die sympathischste Formel, nicht weil sie ihren theoretischen Hintergrund kennen, sondern weil sie wie ein Smiley für das Portrait von Albert Einstein steht.

Der mathematische Beweis

*»Der Beweis ist ein Götze, vor dem
der Mathematiker sich foltet.«*

Arthur Stanley Eddington

Im Alltag genügt es uns, Aussagen und Theorien als gegeben hinzunehmen und diese zur Lösung von Problemen einzusetzen. In den Naturwissenschaften erhalten wir diese Theorie oft durch Versuchsreihen mit anschließender Auswertung oder eventuell auch einfach aus unseren gelebten Erfahrungen. Eine Theorie ist in diesen Fällen so lange gültig, wie sie viele Phänomene eines Zusammenhanges erklärt und solange sie nicht widerlegt oder von einer umfassenderen Theorie ersetzt wird. In der Mathematik haben wir die einzigartige Situation, dass wir in der Lage sind, diese Theorien zu beweisen. Dazu steht uns die Logik als formale Sprache zur Verfügung. Mit ihrer Unterstützung gelingt es uns, formale Aussagen herzuleiten und somit Behauptungen aufzustellen. Das ist die

Voraussetzung, um zu zeigen, dass eine aufgestellte Behauptung nicht nur für Einzelfälle gilt, sondern allgemein gültig ist. Abschließend müssen wir sie formal beweisen.

In der Schule spielt der Beweis nur eine unbedeutende Rolle. Meistens wenden wir die herausgearbeiteten Theorien an, in einigen seltenen Fällen werden wir mit historischen Beweisen oder Beweisideen bekannt gemacht. In der mathematischen Forschung hingegen dreht sich fast alles um die Beweise von einmal aufgestellten Behauptungen. Intuition und Beweis – das sind die beiden Pole dieser Wissenschaft. Immer wieder wird eine neue, originelle Idee oder ein kreativer Gedanke für das Aufstellen einer neuer Theorie gesucht, um daraus einen formal überprüfbaren Beweis herzuleiten. Um einen Beweis für eine aufgestellte Vermutung zu finden, ist sehr viel Konzentration auf die gestellte Aufgabe erforderlich, sehr viel Wissen und Kreativität. Oft ist eine zündende Idee gefragt. Nötig ist ein Element, das eine gedankliche Verbindungen zwischen verschiedenen bekannten Thesen herstellt, denn der Beweis muss sich ja aus bereits bekannten – und somit bewiesenen – mathematischen Tatsachen logisch erschließen. Obwohl es nur eine sehr begrenzte Auswahl an Beweistechniken gibt, führt die Anwendung dieser Technik nicht zwangsläufig zu dem gewünschten Ergebnis. Erst die Verbindung zwischen der Anwendung der Technik, dem Wissen um Sätze und Definitionen aus dem Arbeitsgebiet, und die kreative Herangehensweise – die zündende Idee, die die Wissenslücke schließt – führt zu einem guten Beweis.

Es gibt in der Mathematik vier grundlegende Formen des mathematischen Beweises: den direkten mathematischen Beweis, den Widerspruchsbeweis, den Beweis durch Induktion und den Gegenbeweis.

Bei allen Beweisverfahren wird zunächst eine mathematische Behauptung aufgestellt und diese dann ausgehend von elementaren Grundaussagen – den Axiomen – durch eine vollständige und korrekte Argumentationskette bewiesen. Diese Argumentationskette besteht meistens aus Formeln oder logischen Schlussfolgerungen. Manchmal gibt es auch die Möglichkeit, einen Beweis anhand einer Zeichnung darzustellen.

Während beim direkten Beweis die mathematische Aussage durch logische Schlüsse ausgehend von elementaren Grundaussagen erzielt

wird, geht der Widerspruchsbeweis (*reductio ad absurdum*) einen anderen Weg. Dabei nimmt man zunächst an, das, was man beweisen möchte, sei falsch. Wenn daraus ein Widerspruch folgt, ist die Annahme wahr. Der erste Beweis dieser Art, mit dem Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht in Berührung kommen, ist der Beweis dafür, dass die Wurzel aus 2 nicht als Bruch darstellbar ist. Sie ist also keine rationale Zahl. Dieser Beweis ist im Anhang des Buches zu finden. Es ist ein Beweis, der nicht nur wegen seiner Technik von großer Bedeutung ist, sondern auch deshalb, weil er wahrscheinlich lange verheimlicht wurde. Eine Zahl, die nicht als Bruch darstellbar war, passte lange Zeit nicht in das Weltbild der Pythagoräer, der Anhänger des griechischen Mathematikers Pythagoras (ca. 540–510 v. Chr.).

Die dritte Beweisform ist die vollständige Induktion. Es ist ein Beweisverfahren für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen gelten sollen, oder für alle natürlichen Zahlen ab einer bestimmten Zahl. Man bezeichnet diese Zahl dann als untere Schranke. Diese Beweismethode geht auf den italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) zurück und besteht aus drei Teilen:

Induktionsanfang: Zu Anfang wird die Aussage für die erste natürliche Zahl überprüft, für die die Behauptung aufgestellt wird.

Induktionsschritt: Nachdem vorausgesetzt wird, dass die Behauptung für eine natürliche Zahl gilt, zeigt man, dass sie unter dieser Annahme auch für den Nachfolger dieser Zahl gilt.

Induktionsschluss: Wenn die Aussage für eine beliebige natürliche Zahl gilt, dann ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

Mit diesen drei grundlegenden Techniken der Beweisführung werden in der Mathematik die verschiedensten Behauptungen bewiesen. Manchmal wird mit der Formulierung eines Beweises auch gezeigt, dass eine bestimmte Behauptung unmöglich eintreten kann. Das ist der so genannte Unmöglichkeitbeweis. Diese Form des Beweises ist für viele Menschen nicht einfach nachzuvollziehen, und so kommt es, dass einige Menschen ihre Lebenszeit damit verbringen, Beispiele und Methoden zu suchen, um Wissenschaftler zu überzeugen, dass sie den Unmöglichkeitbeweis zu einer bestimmten Fragestellung widerlegt haben.

Manchmal gibt es für einen Satz oder eine Vermutung unterschiedliche Herleitungen und damit unterschiedliche Beweise. Beim Vergleich der verschiedenen Herleitungen ist die Schönheit für die Mathematikerinnen und Mathematiker ein Qualitätskriterium. Sie geraten oft ins Schwärmen, wenn ein Beweis schön ist. Die Schönheit oder die Eleganz spielt in der Mathematik eine große Rolle. Schönheit ist dabei wie im Alltagsleben zum Teil eine Frage des Geschmacks, dennoch tendieren diejenigen Merkmale, die eine soziale Gruppe als schön empfindet, oftmals in eine bestimmte Richtung. In der Mathematik gilt ein Beweis als schön, der einfach und somit klar hergeleitet ist, oder der auf elegante – das heißt manchmal überraschende – Art durch seine Herleitung verschiedene Themenbereiche miteinander verbindet.

Rechnen mit Näherungswerten

Obwohl die Mathematik eine sehr exakte Wissenschaft ist, rechnen wir sehr oft mit Näherungswerten und kommen damit zu korrekten Ergebnissen und Lösungen. Manchmal rechnen wir bewusst mit Näherungen, um aufwändige Rechenwege zu vermeiden, aber in vielen Fällen gibt es für uns dazu keine Alternative. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Kreisberechnung, bei der wir sowohl den Umfang als auch die Fläche mit der Zahl π berechnen. Die Zahl π kennen wir, wie viele andere Größen auch, nur näherungsweise, und dennoch kommen wir mit ihr zu korrekten Berechnungen. In sehr vielen Teilgebieten der Mathematik müssen wir mit Näherungswerten rechnen. Der Gegenstand der mathematischen Analysis ist das exakte Lösen mathematischer Aufgaben mit Hilfe von Näherungswerten. Viele mathematische Disziplinen beschäftigen sich mit dieser Form der praktischen oder angewandten Mathematik. Gegenstand der numerischen Mathematik – auch kurz Numerik genannt – ist das Ausarbeiten und Analysieren von Algorithmen für mathematische Probleme. Ein Algorithmus ist eine definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines bestimmten Problems in endlich vielen Schritten. Dieser

Algorithmus wird zuerst theoretisch hergeleitet und dann programmiert. Zur Bewertung der Lösung ist die Fehleranalyse unerlässlich. Bei jeder numerischen Berechnung fallen verschiedene Typen von Fehlern an. Rundungsfehler kennen wir alle. Da jeder Computer mit endlich vielen Stellen arbeiten muss, sind diese Rundungsfehler unvermeidlich. Wenn ein Programmdurchlauf sehr viele Rechenschritte beinhaltet, dann wachsen die Rundungsfehler an und beeinflussen die Lösung. Um zu einer qualitativ guten Lösung zu kommen, ist es daher wichtig festzustellen, in welchem Bereich diese Rundungsfehler liegen werden bzw. schon vorher festzulegen, in welchem Bereich die Rundungsfehler liegen dürfen.

Infobox – Abgrenzung Mathematik und Rechnen

Literatur

Olaf Fritsche: »Die Macht der Formeln – und was man mit Formeln macht« ISBN: 978-3-499-62129-1

Olaf Fritsche arbeitet an den Mathematischen Knoeleien beim Spektrum der Wissenschaften mit.

Webtipps

<http://de.wikipedia.org/wiki/Portal:Mathematik>

Die genauen Definitionen der Teilgebiete der Mathematik und ihre Anwendungen findet man mit vielen anderen Informationen beim Mathematik-Portal der Wikipedia.

<http://www.beweiskompodium.de>

Diese Internetseite bietet ein Beweiskompodium mit einer Vielzahl von anschaulichen Beweisen der Geometrie.

http://www.stmwfk.bayern.de/downloads/aviso/2003_1_aviso_38-47.pdf
Schön einfach – einfach schön, ein Artikel von Hans-Joachim Bungartz mit dem Untertitel »Sätze, Beweise und Algorithmen auf dem Laufsteg«.

Muster der Menschheit

*Wo die Natur aufhört, neue Formen entstehen zu lassen,
beginnt der Mensch, mit den natürlichen Dingen, mit Hilfe eben
dieser Natur, eine unendliche Vielfalt der Formen zu erschaffen.*

Leonardo da Vinci

Bei der Frage nach dem Charakter der Mathematik stellen wir – vielleicht überrascht – fest, dass sie ein fester Bestandteil der menschlichen Kultur ist. Andererseits betreiben die Menschen Mathematik auch, um ihre Kultur besser zu verstehen. Die Mathematik und das Menschsein sind seit der frühen Menschheitsgeschichte eng miteinander verbunden. Die Entwicklung des Bewusstseins brachte dem Menschen einen großen Nachteil im Vergleich zum unbewusst agierenden Tier: Der Mensch wird von seiner Umwelt mit Sinneseindrücken überflutet. Für sein Überleben war es daher von Anfang an wichtig, diese Impulse ständig und schnell neu zu ordnen. Wenn ein Mensch neue Prioritäten registriert, reagiert er darauf, indem er sein Verhalten anpasst. Eine Wahrnehmung, die eben noch von großer Bedeutung für ihn war, kann sehr plötzlich in den Hintergrund treten, wenn eine gefährliche Situation die Prioritäten blitzschnell verändert. Kunst und Kultur haben schon zu Beginn der Menschwerdung dafür gesorgt, dass die Menschen ihre räumliche und zeitliche Orientierung entwickelten. Im Alltag prägten sie sich ihre Wege und Lagerplätze immer präzise ein; sie waren sich ihrer zeitlichen und räumlichen Position genau bewusst.

Es gibt die Theorie, dass die Menschen eine »Urmathematik« in sich tragen. Diese zeigt sich an in ihrem Gefühl für Muster, Formen und Symmetrien, das in allen Kulturen wieder zu finden ist. Es wird sichtbar bei der Dekoration von Alltags- und Gebrauchsgegenständen und äußert sich Versen der Poesie, bei der Architektur, der Musik, bei Tänzen und den bildenden Künsten. Zur »Urmathematik« gehört aber auch unser Bedürfnis nach Vervollständigung, d. h. das Zusammenfügen von Einzelteilen zu einem Ganzen. Mosaik, Patchwork und Puzzles aus vielen Jahrhunderten zeigen uns das. Der letzte und vielleicht wichtigste Aspekt dieser Urmathematik ist die Suche der Menschen nach der Wahrheit,

nach einer Schöpfungsidee oder nach dem »inneren Zusammenhang«, der zwischen der Welt und den Menschen besteht. Zahlreiche Märchen, Legenden und Schöpfungsmythen zeigen uns, dass jede Kultur sich ihre eigenen Vorstellungen davon macht, wie die Welt entstanden ist und die ersten Menschen von ihr Besitz ergriffen.

Glauben und Mathematik

*Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist,
und der Teufel existiert, weil wir das nicht beweisen können.*

Andre Weil

Die Mathematik ist die unbestechliche Wissenschaft schlechthin. Sie ist sachlich und logisch aufgebaut und folgt den ewiggleichen Gesetzen. Nichts scheint absurder, als im Zusammenhang mit der Mathematik von Glauben zu sprechen. Aus unserer heutigen Sicht sind wir überzeugt, dass die Mathematik ausschließlich auf Wissen und Beweisen aufgebaut ist. Tatsächlich basiert die Herkunft der Mathematik aber auch auf der Religion. Am Anfang standen Versuche, alle Zusammenhänge in unserem »Weltensystem« logisch zu erklären und durch Beweise zu bestätigen. Nicht erst in der christlichen Tradition gab es den »Gottesbeweis«, für den es verschiedene wissenschaftliche Ansätze gibt.

Der kausale Gottesbeweis beispielsweise besagt, dass alles, was im Universum geschieht, eine Ursache hat. Für die Entstehung des Universums gibt es eine »erste Ursache«. Bei Aristoteles wird diese erste Ursache als der »unbewegte Beweger« bezeichnet. Die christliche Kirche im Mittelalter sieht darin Gott selbst. Dass der Gottesbeweis die Menschen über so lange Zeit beschäftigte, erschließt sich aus einer Vielzahl von Anekdoten und Zitaten in diesem Zusammenhang. Einer der bekanntesten Gottesbeweise ist die Pascalsche Wette, benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623–1662), bei der er mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung argumentiert. Bei Wikipedia wird die Wette folgendermaßen zitiert:

»Angenommen es sei sicher, dass es Gott gibt oder ihn nicht gibt, und dass es keinen Mittelweg gibt. Für welche Seite werden wir uns entscheiden? ... Lassen Sie uns ein Spiel spielen, bei dem es zu einer Entscheidung für »Kopf oder Zahl« kommt. Mit Vernunft können wir weder das eine noch das andere versichern; mit Vernunft können wir weder das eine noch das andere ausschließen. Verfallen Sie also nicht dem Irrtum, dass hierbei eine richtige Wahl getroffen werden könnte, denn Sie wissen nicht, ob Sie falsch liegen oder schlecht gewählt haben ... Sowohl wer sich für »Kopf« entscheidet, als auch wer sich für »Zahl« entscheidet, beide liegen falsch: Die Wahrheit kann nicht durch eine Wette entschieden werden, aber es muss gewettet werden. Es gibt keine Freiwilligkeit, Sie müssen sich darauf einlassen. Wenn Sie nicht wetten, dass es Gott gibt, müssen Sie wetten, dass es ihn nicht gibt. Wofür entscheiden Sie sich? Wägen wir den Verlust dafür ab, dass Sie sich dafür entschieden haben, dass es Gott gibt: Wenn Sie gewinnen, gewinnen Sie alles, wenn Sie verlieren, verlieren Sie nichts. Setzen Sie also ohne zu zögern darauf, dass es ihn gibt.«

Eine weitere Form des Gottesbeweises ist der ontologische Gottesbeweis (ontos [griech.] = das Seiende). Er geht auf den französischen Philosoph Anselm von Canterbury (1033–1109) zurück und wurde über Descartes bis Gödel immer wieder von Logikern aufgegriffen. Bei dieser Form des Beweises wird davon ausgegangen, dass der Begriff »Gott« im menschlichen Denken das bezeichnet, worüber hinaus nichts Vollkommeres gedacht werden kann. Dies führt zu der Erkenntnis, dass dieses Wesen notwendigerweise existiert, d. h. es kann nicht einmal gedacht werden, dass dieses Wesen nicht existiert.

Aber neben dem Gottesbeweis, also der Entscheidung, ob ein Gott existiert oder nicht, gibt es auch noch eine dritte Option: »Der Agnostiker enthält sich jedoch des Urteils, weil es seiner Ansicht nach weder für noch gegen die Existenz Gottes genügend Beweise gibt.« So äußerte sich der britische Mathematiker und Philosoph Bertrand Russell (1872–1970) in einem Zeitungsinterview. Russell war ein großer Gegner der Religionen, die seiner Ansicht nach viel Leid und Kriege über die Menschheit gebracht haben.

Die Mathematik stieß, ähnlich wie die Physik, immer wieder an Grenzen, die dem offiziellen kirchlichen Weltbild oder unseren kulturellen

Vorstellungen widersprachen. In diesen Fällen hatte es die wissenschaftliche Forschung sehr schwer. So gab es in der Geschichte der Mathematik immer wieder Zeiträume, in denen die Menschen komplizierte Umrechnungen in Kauf nahmen, um die Ordnung der Welt nicht zu stören. Beispiele in der europäischen Kultur sind dafür etwa der lange Weg bis zur Einführung der Null oder des Unendlichen, der später genauer betrachtet wird. Aber auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Risikoanalyse gehören zu den Teilgebieten, die diese Hürde erst überwinden mussten.

Wir haben weiter oben schon gesehen, dass die Verwendung von Symbolen und Formeln es zulässt, genaue Informationen weiterzugeben. Aber dabei ist nicht zu unterschätzen, dass mit der Verwendung von Symbolen auch Gefühle und Interpretationen verbunden sind. So sind auch die mathematischen Symbole Projektionsfläche für allerlei mystische Gedankengänge. Sie entwickeln ein Eigenleben, beginnend mit der Symbolisierung von einzelnen Zahlen als Glücks- oder Unglückszahlen bis hin zu der Vorstellung, man könne aus bestimmten Konstellationen die Zukunft vorhersagen.

Dass nicht nur die Herkunft der Mathematik eng mit dem Glauben verbunden ist, sondern die Mathematik selbst, ist ein irritierender Gedanke. Sieht man sich aber die moderne Mathematik näher an, so kann man nach einer Theorie des österreichischen Mathematikers Kurt Gödel (1906–1978) die Mathematik durchaus als Form einer Religion ansehen. Nämlich dann, wenn man die Religion als ein Gedankensystem definiert, das unbeweisbare Aussagen, also Glaubenselemente, enthält. In der Mathematik wären das die Axiome, auf denen alle mathematischen Theorien beruhen.

Infobox – Glauben und Mathematik

Webtipps

<http://hometown.aol.de/astonsurf>

Gut gemachte und ausführliche Seite zur Herkunft der Mathematik und eine Sammlung von Bibeltexten zur Mathematik.

http://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Mathematik

Der Artikel »Geschichte der Mathematik« in der Wikipedia gibt einen Überblick über verschiedene mathematische Schulen, beginnend mit der Mathematik der Ägypter und Babylonier bis in die Neuzeit.

Kunst, Kultur und Mathematik

*Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist,
wird niemals ein vollkommener Mathematiker sein.*

Karl Weierstraß

In unserer modernen westlichen Gesellschaft begnügen wir uns oft damit, Mathematik als Hilfsmittel bei der Bewältigung von Ingenieurproblemen zu betrachten. Diese einseitige Sichtweise ist vielleicht die Ursache dafür, dass wir immer wieder auf das Klischee stoßen, die talentierte und konzentrierte Beschäftigung mit Farben und Formen (als Symbole für die Kunst) und die intensive und erfolgreiche Beschäftigung mit Formeln und Gleichungen (als Symbole für die Mathematik und Physik) würden einander ausschließen. Hierbei klingt das alte Vorurteil durch, die Beschäftigung mit Logik und Physik oder Mathematik erfordere keine Kreativität, oder umgekehrt, die Kreativität des Künstlers reiche aus, um Kunstwerke zu erschaffen. Aber wie in diesem Buch gezeigt werden soll, mussten die Mathematikerinnen und Mathematiker aller Zeiten ebenso wie andere Naturwissenschaftler eine ungeahnte Kreativität entwickeln, um mit ihren Theorien weiter zu kommen. Und genauso setzten sich die Künstler immer wieder mit den technischen, mathematischen oder physikalischen Theorien und wissenschaftlichen Erkenntnissen auseinander, um sie im Hinblick auf ihre künstlerische Arbeit anzuwenden oder diese auch weiterzuentwickeln.

Gemeinsam ist der Kunst und der Mathematik, dass beide mit Symbolen betrieben werden. Während in der Mathematik diese Symbole jedoch für eine einfache und knappe Informationsspeicherung stehen, können die Symbole in der Kunst auf verschiedene Weise interpretiert werden.

Die Kreativität des Künstlers ermöglicht diese vielfältige, gefühlsbetonte Interpretation der abstrakten Symbole.

In jüngerer Zeit gibt es Bestrebungen, die Gesellschaft auf ihre sozio-mathematische Sichtweise hin zu untersuchen. Man hat verstanden, dass auch in die mathematische Forschung der jeweilige Zeitgeist einfließt oder, noch drastischer ausgedrückt, dass es mathematische Moden und Stilrichtungen gibt, die im Gesamtzusammenhang der Kultur zu betrachten sind. Kultur reagiert im besten Fall auf die Bedürfnisse, Wünsche, Sehnsüchte und Hoffnungen der Menschen. Da Mathematik ein Teil unserer Kultur ist, reagiert auch sie darauf. Das Umfeld, in der sie ausgeübt wird, prägt die Mathematik und spiegelt sich in der entwickelten Mathematik wieder. Dies wurde schon beim Einsatz der Mathematik auf der Suche nach der Wahrheit und der Schöpfungsidee deutlich. Obwohl Inhalt und Theorie ohne Zweifel sinnvoll sind, beruht die Mathematik auf dem Übereinkommen der Menschen, diese Inhalte gelten zu lassen. Ohne menschliches Bewusstsein existiert sie nicht, sie ist nur im gegenseitigen Einvernehmen, in ihrem kulturellen Kontext verständlich. In der Musik und in der Malerei finden sich einige mathematischen Theorien und Symbole wieder. Weiter oben wurde bereits erläutert, dass wir Mathematik als die Wissenschaften der Ordnungsmuster auffassen können. Mustererkennung bedeutet im einfachsten Fall: Ordnung. Maßstäbe ordnen und anwenden, um Vergleiche zu treffen, ist als Vorstufe zur Kommunikation zwischen den Menschen unerlässlich. Wie sollten sie eine gemeinsame Sprache finden, wenn sie sich nicht auf ein gemeinsames Lautmuster hätten einigen können?

Die menschliche Fähigkeit zur Mustererkennung hat dafür gesorgt, dass wir von Symmetrien, die ja ganz besondere Ordnungsmuster sind, und von der Brechung der Symmetrien fasziniert sind. Wir suchen Vollkommenheit und Schönheit in Symmetrien und bedienen uns dabei sowohl den Techniken der Kunst als auch der Mathematik. Dabei kommt den mathematischen Theorien um den Goldenen Schnitt eine erhebliche Bedeutung zu. Die Natur bedient sich des Goldenen Schnitts in den unterschiedlichsten Zusammenhängen, um ein harmonisches Verhältnis von Proportionen zu schaffen. Beeindruckende Beispiele sind die Anordnung von Blättern oder Blütenstände bei Pflanzen. Aber auch aus der Astronomie und der Physik

gibt es Beispiele. Das ästhetische Empfinden der Menschen ist sehr von diesem Verhältnis der idealen Proportionen geprägt. Daher findet das Prinzip des Goldenen Schnitts Anwendung in Kunst, Architektur und Musik.

Mathematik und Malerei

Die Berührung des spitzen Winkels eines Dreiecks mit einem Kreis hat in der Tat nicht weniger Wirkung als die des Finger Gottes mit dem Finger Adams bei Michelangelo.

Wassily Kandinsky

Über Jahrhunderte hinweg haben sich die Malerei und die Mathematik gegenseitig befruchtet. Das gilt nicht nur für die realistische, sondern auch für die abstrakte Malerei. Schon früh wurden in verschiedenen Kulturen Ornamente und Symmetrien für die Dekoration von Gebäuden, Parketten, Möbeln und Stoffen verwendet. Kunstvolle Ornamente mit abstrakten geometrischen Mustern in vielfältigen Farben verzieren in der islamischen Kultur Gebäude und Textilien. Das Darstellungsverbot von Menschen förderte die Entwicklung komplexer abstrakter Muster. Vor kurzem gelang es einem Wissenschaftler der Harvard-Universität in Cambridge, USA, in einer Begräbnisstätte aus dem Jahr 1453 ein quaskristallines Muster zu erkennen. Als dieses Muster, das nach einfachen Regeln aus zwei geometrischen Formen gebildet wird, 1974 von dem britischen Mathematiker Roger Penrose (1931) wieder entdeckt wurde, ahnte niemand, dass es vor ein paar hundert Jahren schon einmal von einem Künstler entdeckt worden war.

Zu allen Zeiten gab es Künstler, die die wissenschaftlichen Theorien ihrer Zeit genau untersuchten, um damit die künstlerische Entwicklung voranzutreiben. Bekannte Beispiele aus dem Mittelalter sind der deutsche Maler Albrecht Dürer (1471–1528) oder der italienische Maler und Architekt Michelangelo (1475–1564). Beide Künstler beschäftigten sich intensiv mit Perspektivproblemen und versuchten, diese mit den Möglichkeiten der Mathematik zu erforschen.

Die Perspektivproblematik erwies sich als eine komplizierte Problemstellung. Erst nach dem 15. Jahrhundert, als die ersten Künstler einen

Fluchtpunkt verwendeten, um die räumliche Anordnung in den Zeichnungen wiederzugeben, entstanden die ersten realistischen Zeichnungen mit Zentralperspektive. Mathematisch gesehen bedeutet dieser Fluchtpunkt die Null, den Ursprung. Obwohl uns die Null heute so selbstverständlich erscheint, war ihre Einführung lange sehr umstritten, wie in einem der nächsten Kapitel gezeigt wird. Die Maler legten die Bilder so an, dass gedachte Strahlen, die vom Auge des Betrachters ausgingen, die Objekte auf die Leinwand projizierten. Gegen 1600 entdeckten die Künstler dann, dass sie jeden Punkt der Leinwand als Fluchtpunkt verwenden konnten. Die Revolution in der Praxis fand einige Zeit vor der Revolution der Theorie statt.

Manchmal war es aber auch umgekehrt. Auch aus der Malerei lassen sich Rückschlüsse auf wissenschaftliche Theorie ziehen. Beispiele hierfür finden sich in den Werken des Niederländers Vincent van Gogh (1853–1890), ein herausragender Maler. Eine der Besonderheiten van Goghs war, dass sein Talent nicht angeboren, sondern hart erarbeitet war. Er kam erst spät zur Malerei und so mancher Zeitgenosse wusste nicht so recht, was er mit van Goghs Bildern anfangen sollte. »Entweder ist er total verrückt oder er ist das größte Genie unserer Zeit«, so lautete die Meinung einiger zeitgenössischer Malerkollegen. Inzwischen wurden Van Goghs Bilder nach vielen wissenschaftlichen Theorien ausgewertet. Es gibt Untersuchungen, die sich mit der astronomischen Konstellation seines Bildes *Sternennacht* auseinandersetzen, sowie Analysen, die die Größenverhältnisse seiner Stube im gelben Haus untersuchen. Eine weitere Studie aus dem Jahr 2006 beschäftigt sich mit den gemalten Wirbeln dreier seiner Bilder. Ein Physiker der Universität Mexico untersuchte die Strukturen der Wirbel und kam zu dem Ergebnis, dass sie den physikalischen Gesetzmäßigkeiten für turbulente Strömungen entsprechen, wenn man ihnen das entsprechende Modell zugrunde legt, das von dem russischen Mathematiker Andrei Kolmogorov (1903–1987) entwickelt wurde.

Aber auch in der neueren europäischen Kultur faszinieren uns »Spieleereien« mit Symmetrien und Projektionen über viele Generationen hinweg. Die Abbildungen des niederländischen Künstlers Maurits Cornelis Escher (1889–1972) sind sehr bekannt: beispielsweise der Wasserfall, der seinen nicht enden wollenden Weg gegen die Natur zu nehmen scheint,

oder die Mönche, die reihum immer wieder im Kreis gehen – sie gehen immer nach oben und kommen nie an. Eines seiner Bilder stellt das Rätsel um das Möbiusband dar: Auf einem geschlossenen Band, das kein Innen und kein Außen kennt, laufen Ameisen wie auf einer endlosen Rennstrecke. Dieses Rätsel ist seit ca. 150 Jahren bekannt und wurde von Mathematikern aus London erst 2007 gelöst.

Eine Stilrichtung der Malerei und der bildenden Künste, die sich explizit mit mathematischen Fragestellungen und Methoden beschäftigt, ist die Konkrete Kunst. Sie entstand in den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts und verarbeitet Motive aus Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Permutationen und Gleichungen ebenso wie Zufall und Chaos.

In den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts entwickelte sich die so genannte Computerkunst. Durch das Aufspüren von Mustern und Ordnungen in grafischen bzw. bildlichen Darstellungen lassen sich oft neue Erkenntnisse in der Mathematik finden. Die Faszination und Ästhetik, die von Funktionen oder Modellen ausgeht, bewirkte, dass mit dem Auftauchen der ersten visuellen Darstellung die »Computerkunst« boomte. Die Möglichkeit, in kürzester Zeit so vielfältige Varianten errechnen zu können, faszinierte Laien und Experten. Muster über Muster wurden nun sichtbar, vorstellbar und reproduzierbar.

Veranstaltungen moderner Museen, die die mathematisch relevanten Aspekte von Kunstwerken vorstellen oder die künstlerischen Ergebnisse aus der Sicht des mathematischen Denkens erläutern, sind eine gute Möglichkeit, einen Einstieg in diese verschiedenen Ansätze der Kunstrichtungen zu erhalten.

Mathematik und Musik

*Musik ist eine arithmetische Tätigkeit des Geistes,
dem verborgen bleibt, dass er dabei in Zahlen denkt.*

Gottfried Wilhelm Leibniz

Musik wird manchmal auch als empfundene, hörbare Mathematik bezeichnet. Musik und Mathematik sind wie zwei untrennbare Geschwister. Wir fühlen uns ebenso angezogen von Liedern und Klängen im Rhyth-

mus unseres Herzschlags oder Atems wie von den Tönen und Geräuschen, die uns in der Natur umgeben. Der Komponist Claude Debussy (1862–1918) formulierte das sehr ansprechend in seinem Zitat: »Musik ist eine geheimnisvolle Mathematik, deren Elemente am Unendlichen teilhaben. Sie lebt in der Bewegung der Wasser, im Wellenspiel wechselnder Winde ...«

Unser Leben wird von rhythmischen, biologischen Zyklen bestimmt. So ist es nicht verwunderlich, dass unser Körper und unsere Seele durch den akustischen Rhythmus angesprochen werden. Dass Rhythmen Auswirkungen auf unser Immunsystem und unsere Gesundheit haben, ist inzwischen eine wissenschaftlich belegte Tatsache.

Bis in das Mittelalter gehörte die Musik neben der Arithmetik, Geometrie und Astronomie zum »Quadrivium«, der Hauptabteilung der »Freien Künste«. Aber worin genau besteht der Zusammenhang zwischen der Musik und der Mathematik? Den direktesten Zusammenhang erkennen wir an dem Zahlenverhältnis zwischen einem Ton und seinem Gleichklang eine Oktave höher. Es verwundert kaum, dass die Griechen, die tiefe mystische Beziehungen zwischen einzelnen Formen und Zahlen vermuteten, diesen Zusammenhang entdeckten und erforschten. Eine heilige Form war beispielsweise das Pentagramm, ein fünfzackiger Stern. Aus diesem leiten sich der Goldene Schnitt und damit indirekt auch die Tonleiter und die Harmonie ab.

Nach Pythagoras benannt ist die pythagoreische Stimmung. Er entdeckte, dass Töne in mathematischen Verhältnissen ausgedrückt werden können. Die pythagoreische Stimmung wurde am Monochord entwickelt, einem Resonanzkasten, über dem eine Saite gespannt ist. Auf dieser Saite bezeichnet das Längenverhältnis 1:2 die Oktave, 2:3 die Quinte und 3:4 die Quarte. Diese Beziehungen sind, wie Pythagoras wusste, auch auf Metallstücke und Flöten zu übertragen. Die weiteren Töne ergeben sich durch Saitenteilungen in einer Relation von 2:3 (Quinte). Man kann sie durch entsprechende Multiplikation mit 2 (Oktavsprung) in einen Oktav-ausschnitt zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ einordnen.

Aber nicht nur die Höhe der Töne, auch die Tondauer der abendländischen Musik beruht auf dem Halbieren der Töne. Immer wieder finden

wir in der Geschichte Beziehungen zwischen der Mathematik und der Musik. 1619 veröffentlichte der bekannte Astronom Johannes Kepler das Werk »Harmonices Mundi« – die Sphärenmusik. Er ordnet jedem Planeten einen eigenen Ton zu, den er von der relativen Umlaufgeschwindigkeit ableitete.

Die Fibonacci-Zahlen, die auch in Dan Browns Roman »Sakrileg« eine Rolle spielen, finden sich in der Harmonielehre in unterschiedlichen Bezügen wieder. Die Fibonacci-Zahlenfolge beginnt mit 0 und 1, alle weiteren Zahlen sind dann die Summe der vorhergehenden Zahlen. Untersucht man Tonsysteme, Tonskalen oder Tonarten, stößt man immer wieder auf diese bekannte Zahlenfolge.

Ein Problem, das viele Generationen von Mathematikern beschäftigte, ist das der schwingenden Saite. Erst mit den Möglichkeiten der Differentialrechnung wurde es möglich, Instrumentenklänge zu analysieren.

Wir sehen an den genannten Beispielen, dass Mathematik mehr ist als ein Hilfsmittel zur Deutung der Musik. Seit Urzeiten verarbeiten Menschen ihre Gefühle wie Trauer, Freude und Sehnsucht mit Melodien und Rhythmen und wurden dazu wahrscheinlich von den Klängen der Natur, dem Pfeifen des Windes oder dem Plätschern des Regens inspiriert. Seit dieser Zeit versuchten sie, auch die Sprache, die Zeichen und Muster dieser Natur zu verstehen, zu entschlüsseln und zu imitieren.

Ethnomathematik

Mathematik gehört auch zu unserer Lebensweise, nur nicht so wie beim weißen Mann – mit Zeittafeln, mit Addieren oder Subtrahieren. Wir benutzen das bei unserer Perlenstickerei, bei der Pferde- und Viehzucht, wenn wir einen Zaun setzen oder ein Zelt aufstellen.

Fabian Jenks, ein Stammesältester der Ute

Was hat Mathematik mit Tanzen, Malen und Singen zu tun? Mehr als wir auf Anhieb denken. Hier wurde bereits gezeigt, dass sich die Mathematik und das Rechnen als Bestandteil unserer Kultur entwickelt und sie somit von unseren kulturellen Erfahrungen und unserer kulturellen Umwelt geprägt wird. Dass die Mathematik von der Kultur abhängig ist, scheint

jedoch zunächst der Aussage zu widersprechen, dass sie exakt und nach strengen logischen Regeln aufgebaut ist. Betrachten wir das mathematische Verständnis unterschiedlicher Kulturen, so finden wir faszinierende mathematische Konzepte, die die Umwelt beschreiben. Diese mögen uns zunächst überraschen, weil wir sie ausgehend von unserem Kulturhintergrund so ganz anders einschätzen. Wir unterliegen oft dem Irrtum, dass wir kulturelle Einflüsse für allgemeingültig halten. Wir verallgemeinern unsere Erfahrungen und sind uns nicht bewusst, wie zeit- und ortsabhängig diese Erfahrungen sind.

Wie bereits erläutert wurde, haben die Menschen immer versucht, die Natur und damit ihre Umwelt zu erforschen und begannen mit dem Vergleichen, dem Einteilen, Messen und Abzählen sowie dem Aufspüren von Mustern und Strukturen. Daraus entwickelte sich dann ihre Fähigkeit, logische Schlüsse zu ziehen. Diese mathematische Entwicklung lief parallel zu anderen Kulturtechniken wie Sprache, Herstellung und Gebrauch von Werkzeugen oder auch Kunst, Musik und Architektur. Die Mathematik ist daher ebenso kulturabhängig wie die genannten Kulturtechniken. Die Wissenschaft hat erst in jüngster Zeit diese Zusammenhänge thematisiert und herausgefunden, dass die kulturellen Unterschiede der Menschen auch zu unterschiedlichen mathematischen Denk- und Arbeitsweisen geführt hat. Mit dieser kulturellen Vielfalt beschäftigt sich die Ethnomathematik.

Die Ethnomathematik hat sich zunächst aus dem Zweig der Geschichte der Mathematik entwickelt. Später kamen dann die verschiedenen Erkenntnisse der Anthropologie und Ethnologie hinzu. Die Herstellung von Mustern und Ornamenten zur Verzierung von Gebäuden, Kleidung und Gegenständen ist dabei ein kleiner Zweig, über den es viel zu schreiben gäbe. Auch die Beschreibung des astronomischen Weltbildes mit mathematischen Mitteln ist kulturabhängig. Ein Paradebeispiel dafür sind die akribischen Kalenderberechnungen der Maya. Ihre Kultur hatte eine regelrechte Obsession für diese Form der Berechnungen. Heute sind viele mathematische Traditionen ausgestorben. Die Kolonialregime unterdrückten diese Kulturtechniken massiv und trieben sie damit schließlich in den Untergang.

Wie schon gezeigt wurde, ist die Mathematik kein festumrissenes Themengebiet. Die regionalen Techniken hatten es dadurch immer schwer, sich gegen die globalen durchzusetzen. Der tiefere Sinn fremder Formenwelten erschließt sich eben nicht sofort. Dazu ist einführendes Wissen notwendig und Zeit, um dieses Wissen anzuwenden. Mit zwei herausragenden Beispielen soll hier darauf aufmerksam gemacht werden, wie originell und kreativ einige dieser kulturabhängigen Techniken sind. Im ersten Fall handelt es sich um eine mathematische Entdeckung, für die andere Kulturen Jahrhunderte lang keine Entsprechung besaßen. Im zweiten Fall handelt es sich um ein ausgeklügeltes Schrift-, Dokumenten- und Rechensystem, das einzigartig geblieben ist und leider aus Unkenntnis darüber fast gänzlich vernichtet wurde.

Das erste Beispiel ist die Kultur der Maya. Sie war eine Kultur, die mit Selbstverständlichkeit alle Lebensabläufe in Zyklen einteilte und zwei verschiedene Arten der Null erfand, während die europäische Kultur noch Jahrhunderte dazu brauchte, die Null wirklich zu entdecken und die Angst vor ihr abzulegen.

Das zweite Beispiel sind die Quipus der Inka. Diese geknoteten Zahlenschnüre wurden buchstäblich auf Scheiterhaufen verbrannt. Heute sind nur noch einige wenige übrig, die der Wissenschaft zur Verfügung stehen. Zwar hat man die spannenden numerischen Geheimnisse rund um die Zahlenschnüre zu einem kleinen Teil aufdecken können, aber vieles wird für immer im Dunkeln bleiben. Wieder einmal ist die kulturelle Kette, die zu Beginn des Buches beschrieben wurde, gerissen. Damit ist eine lange Tradition an Wissen verloren gegangen und es ist unmöglich, sie wieder aus ihrer Versenkung zu holen. Es ist so viel einfacher, das Bestehende zu wahren, als das beinahe Verschollene wieder zurückzuholen. Vielleicht lernt die Menschheit in einer nicht allzu fernen Zukunft, dass sie mit kulturellem Wissen schonend umgehen muss, wenn sie ihr Überleben sichern will. Bei der natürlichen Umwelt hat sie das von der Theorie her schon verstanden. Leider sind keine Bestrebungen zu erkennen, die gewonnene Erkenntnis auch umzusetzen. Für die kulturellen Bräuche und Sitten gilt jedoch ebenfalls, dass nicht alles, das sich unserer Bedeutung nicht umgehend erschließt, nutzlos ist.

Infobox – Kunst, Kultur und Mathematik

Webtipps

<http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/objekte.html>
Mathematik und Mathematiker als Objekte der Kunst

http://www.math-edu.de/Mathegarten/Mathe_Musik/mathe_musik.html
Interessante Internetseite, die so unterschiedliche Themen wie die Pythagoreische Stimmung, Keplers Sphärenmusik, Eulers Zahlenzuordnungen zu Tönen, die chromatische Tonleiter oder die Fibonacci-Zahlen in der Musik erläutert.

<http://math.space.or.at>
math.space – Verein für Mathematik als kulturelle Errungenschaft

<http://www.journalfuerkunstsexundmathematik.ch>
Das Journal für Kunst, Sex und Mathematik aus der Schweiz ist ein modernes Gemeinschaftsprojekt im Internet. Ein Weblog mit aktuellen Artikeln und Grafiken.

Literatur

Helmut Neunzert, Bernd Rosenberger: »Oh Gott, Mathematik!?!«

ISBN: 978-3-8154-2514-5

Aus der Reihe »Einblicke in die Wissenschaft« des Teubner-Verlags.

Schreckgespenster: Mengenlehre und Co.

In den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts fällt die Mengenlehre – auch new mathematics genannt – wie ein Schreckgespenst über die Eltern- und Erziehergeneration her. Die Menschen erkennen die Mathematik in dieser für sie ungewöhnlichen Erscheinungsform nicht wieder und reagieren sowohl mit Spott und Hohn als auch mit Furcht auf die ungewohnte Konfrontation mit diesem Wissensfeld im Rahmen der Schulmathematik.

Die Mengenlehre geht auf den deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) zurück. Nach seiner Definition von 1877 ist eine Menge »eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen«. Zunächst beschäftigten sich nicht viele Mathematiker mit der Mengenlehre. Aber im Laufe des ersten Drittels des 20. Jahrhunderts gewann sie immer größere Bedeutung für die Strukturierung der Mathematik. Daraus folgte der Entschluss, sie in die Schulmathematik einzubeziehen, um das logische und abstrakte Denken der Kindern zu fördern.

In Westdeutschland wurde die Mengenlehre in Folge des sogenannten »Sputnikschocks« eingeführt. 1953 gelang es der damaligen UdSSR, noch vor den USA einen Satelliten, Sputnik genannt, ins All zu schicken. Die westlichen Länder empfanden dies als Schock und versuchten, mit einer »Bildungsoffensive« die naturwissenschaftlichen und technischen Schulfächer zu stärken. Die Schülerinnen und Schüler unterrichtete man in Mengenlehre im Sinne einer »visualisierten« Mathematik mit neuesten technischen Voraussetzungen (dem Farbfernsehgerät) und modernsten didaktischen Lerneinheiten. Dadurch ist die Mengenlehre im kollektiven Gedächtnis der betroffenen Schüler- und Elterngeneration haften geblieben: eingebunden in bunte Bildchen, aber auch als Zeichen einer neuen abstrakten, logischen Mathematik. Gescheitert ist die Übernahme der Mengenlehre vom wissenschaftlichen Kontext direkt in den Mathematikunterricht der Grundschule durch die fehlende Einbindung in den Erfahrungsbereich der Pädagogen und der Eltern. Die didaktischen Konzepte und Lehrmethoden für den Einsatz im Mathematikunterricht waren zwar erarbeitet, aber es fehlte die Basis und das Umfeld, in der sie fruchtbar wirken konnten.

Ähnliche Schreckgespenster der Schulmathematik waren die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik, die heute allerdings – ebenso wie die Mengenlehre – ihren festen Platz im Lehrplan haben.

Auch wir können Mathe!

Amazonen sind auch auf geistigem Gebiet naturwidrig.

Max Planck

Die Fähigkeit, Mathematik zu beherrschen und logisch denken zu können, wurde im Laufe der Menschheitsgeschichte vielen gesellschaftlichen Gruppen abgesprochen: Frauen, Kindern und kranken oder behinderten Menschen ebenso wie bestimmten ethnischen oder sozialen Gruppen. Die Frauen waren, wie so oft, die größte Gruppe, welcher der Zugang zur Mathematik lange Zeit verwehrt wurde. Jahrhunderte lang waren sie von jeglicher Bildung ausgeschlossen. Manchmal mussten sie sich ihr Wissen heimlich aneignen und ihre Identität verleugnen, wollten sie auf dem Gebiet der Mathematik forschen. Trotz dieser Schwierigkeiten gab es zu allen Zeiten Frauen, die sich mit der Mathematik beschäftigten. Eine sehr berühmte Philosophin und Mathematikerin war Hypatia von Alexandrien (ca. 370–415). Sie ist eine der wenigen Frauen, die in fast allen Geschichtswerken der Naturwissenschaften erwähnt werden. Hypatia wurde in eine Familie begabter Mathematiker hineingeboren und ihr Talent wurde von ihrem Vater gefördert, obwohl eine wissenschaftliche Ausbildung für Frauen selbstverständlich nicht üblich war. Leider sind ihre Texte verschollen. Sie wurde von christlichen Fanatikern grausam ermordet.

Aber auch im Umfeld von Pythagoras gab es Mathematikerinnen. Als er starb, waren seine Frau Theano von Kroton und die gemeinsame Tochter Damo seine Nachfolgerinnen.

In der Neuzeit gab es immer wieder Frauen, die sich auf einem ungewöhnlichen, manchmal abenteuerlichen Bildungsweg mathematische Bildung auf höchstem Niveau aneigneten. Eine davon war beispielsweise die französische Mathematikerin Marie-Sophie Germain (1776–1831), die sich ganz allein in die Mathematik einarbeitete und unter einem männlichen Pseudonym im Briefwechsel mit dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß stand.

Eine weitere deutsche Mathematikerin der Neuzeit, die aus einer begabten und bekannten Familie stammt, ist Caroline Lucretia Herschel

(1750–1848). Sie wurde von ihrem Bruder Wilhelm (1738–1822) unterrichtet und war als Astronomin tätig. Neun Kometen entdeckte sie in ihrer Zeit. Sie und die schottische Astronomin und Mathematikerin Mary Somerville (1780–1872), eine der berühmtesten Autodidaktinnen ihrer Zeit, waren die ersten Frauen, die 1835 in die Royal Astronomical Society aufgenommen wurden.

Auch in den Anfängen desjenigen Zeitalters, in dem sich die Menschen zu ersten Mal mit der Arbeitsweise einer Rechenmaschine – des späteren Computers – beschäftigten, war eine Frau und Autodidaktin eine der Vorreiterinnen. Den ersten Algorithmus für einen Computer entwickelte 1842 die britische Mathematikerin Ada Lovelace (1815–1852).

Eine ausführliche, beeindruckende Aufstellung von Mathematikerinnen findet sich im Internetauftritt der schottischen Universität St Andrews.

Es fällt auf, dass viele Frauen, die sich ihr mathematisches Wissen auf die unterschiedlichste Weise angeeignet haben, von ihren Vätern oder Brüdern gefördert wurden. Vielleicht entsteht hier wieder der Eindruck, man müsse eine besondere Begabung haben, um sich mit Mathematik beschäftigen zu können. Aber dabei ist auch zu bedenken, dass eine persönliche besondere Begabung in einem Umfeld, das sich häufig einem bestimmten Thema widmet, selbstverständlich auch direkter wahrgenommen wird. Dennoch waren die Vorbehalte gegenüber den intellektuellen Fähigkeiten von Frauen über lange Zeit unglaublich hoch. Eine Förderung durch männliche Familienangehörige in Verbindung mit beharrlicher autodidaktischer Wissensaneignung auf höchstem wissenschaftlichen Niveau war praktisch die einzige Möglichkeit für Frauen, gegen alle gesellschaftlichen Zwänge anzugehen und mathematisch zu arbeiten.

Bis in die heutige Zeit müssen sich Frauen gegen Vorurteile bezüglich ihrer mathematischen Fähigkeiten wehren. Leider haben diese Vorurteile noch weitere diffizile Auswirkungen. In einer Studie aus dem Jahr 2006 zeigten die kanadischen Psychologen Ilan Dar-Nimrod und Steven Heine, dass die mathematischen Leistungen von Frauen abnehmen, wenn man sie mit Texten und Ansichten konfrontiert, die besagen, dass Frauen von Natur aus nicht so gut abschneiden wie Männer. Das »Kleinreden« der

eigenen Fähigkeiten bewirkt bei Frauen aufgrund ihrer Sozialisation leider immer noch einen sehr viel stärkeren Leistungsabfall als bei Männern.

Hier wurde bereits gezeigt, dass die Mathematik geprägt ist von Mustern. Und wer versteht ganz besonders viel von Mustern? Kinder sind wahre Meister der Mustererkennung. Ob visuelle oder akustische Muster, Kinder widmen sich ihnen mit Hingabe. Da verwundert es auch nicht, dass Kinder fast aller Altersgruppen in der Lage sind, mathematische Zusammenhänge zu verstehen. Selbstverständlich ist es schon im Kindergartenalter möglich, die Kinder sinnlich mit Mathematik zu beschäftigen. Dabei kommen ganz unterschiedliche Methoden zum Einsatz. Bei einigen Methoden wird bewusst auf die Einführung von Zahlen verzichtet. Stattdessen steht im Mittelpunkt, dass die Kinder lernen, abstrakt zu denken und Mengenerfahrungen zu machen. Das Abschätzen von Mengen mit den Händen ist dabei eine Standardaufgabe. Aber auch sortieren und vergleichen ist den Kleinen möglich. Dreiecke, Kreise und Rechtecke können beispielsweise mit Teppich-Resten gelegt oder als Holzformen in eine Schachtel gesteckt werden. Eine neue Studie hat kürzlich wieder gezeigt, wie gut Kinder im Kindergartenalter mit Mengen umgehen können. Obwohl sie die Regeln des Subtrahierens und Addierens noch nicht beherrschen, haben sie ein relativ gutes »Bauchgefühl«, wenn man sie nach den Unterschieden der Mengen fragt. Das trifft nicht nur auf einstellige Zahlenbereiche zu, sondern auch auf zweistellige. Fragt man die Kinder danach, wie viel übrig bleibt, wenn aus einer Menge von 34 Teilen 13 weggenommen werden, liegen sie mit ihren Schätzungen sehr nahe an der Lösung. Wenn es gelänge, dass sich Kinder dieses Mengenempfinden auch in der Grundschule erhalten, dann könnten sie ihre eigenen Rechnungen besser einschätzen.

Es gibt einige Methoden, um bei Kindergartenkindern das Zahlengefühl für die Zahlen eins bis zehn zu entwickeln und eine stabile Basis für die spätere Erweiterung ihres Zahlenhorizontes zu errichten. Dabei wird beispielsweise mit Objekten aus dem Alltag gearbeitet. Durch die Verbindung mit visuellen und materiellen Objekten werden die Kinder mit den Zahlen vertraut gemacht. Auch Sand- und Sonnenuhren sind für die Kleinen faszinierende Spielobjekte.

An vielen Universitäten wird in den Ferien die Kinderuni angeboten. Im Rahmen der Kinderuni können Kinder an speziellen Vorlesungen für Kinder und manchmal auch für die Eltern teilnehmen. Außerdem können sie Labore und Workshops besuchen, während ein paralleles Elternprogramm stattfindet. Es gibt z. B. an der Bremer Uni eine mathematische Rallye mit Kopf und Fuß, und in Magdeburg geht man dem Lächeln der Mona Lisa nach und fragt sich, ob Schönheit messbar ist. Für ältere Schüler gibt es ebenfalls Veranstaltungen an den Universitäten, etwa das »Studium Schnupperale« speziell für die Oberstufe.

Auch Menschen mit den verschiedensten geistigen und psychischen Behinderungen können Mathematik lernen. Spektakulär und daher vielen Menschen bekannt ist die Spezialbegabung einiger weniger Autisten, die virtuell bestimmte Rechenoperationen nachvollziehen können und wahre Meister der Zahlenakrobatik sind. Im Hollywoodfilm »Rainman« wird beispielsweise ein sehr einseitiges Portrait eines Menschen mit dieser Spezialbegabung gezeichnet. Realistischer ist da die Schilderung der beiden Zwillinge aus Oliver Sacks Buch »Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte«. Diese autistischen Zwillinge waren in den fünfziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts in den USA durch einige Auftritte in Shows bekannt. Sie »kommunizierten« miteinander, indem sie mehrstellige Primzahlen aufsagen.

Weniger spektakulär ist die pädagogische Arbeit mit Kindern, die an Trisomie 21 (früher: Down-Syndrom) leiden. Die Ergebnisse der pädagogischen Arbeit mit diesen Kindern zeigen sehr deutlich, dass man sich der Mathematik und dem Rechnen auf jedem individuellen Niveau annähern kann. Außerdem machen sie auf einen weiteren wichtigen Aspekt aufmerksam. Freude, Spaß und ein Glücksgefühl stellen sich ein, wenn die Menschen intellektuell gefordert werden und Lösungswege für Problemstellungen finden, die ihren Begabungen und Fähigkeiten angepasst sind. Dazu müssen keine Spezialbegabungen vorhanden sein.

Bei Tieren haben Menschen immer wieder versucht, nachzuweisen, dass sie zumindest rechnen können. Aber das hat sich immer wieder als ein spezieller Dressurtrick herausgestellt. Allerdings gibt es bei manchen Tierarten, z. B. Affen und anderen Säugetieren, aber auch bei dressierten

Vögeln, eine einfache Fähigkeit, eine bestimmte Anzahl wahrzunehmen. Man könnte es als ein Zahlengefühl beschreiben, wenn ein Tier erkennen kann, ob sich bei einer bestimmten Menge von Tieren oder Gegenständen die Anzahl verändert hat, also ob eines hinzugekommen ist oder weggenommen wurde.

Infobox – Auch wir können Mathe!

Webtipps

<http://www.mathematikerin.de>

Frauen in der Mathematik

<http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Indexes/Women.html>

Beeindruckende Aufstellung von Mathematikerinnen

Filme

»Mathe macht glücklich« und »Lasst uns leben, lasst uns lernen«
Zwei Filme von Christel Manske über ihre pädagogische Arbeit mit Kindern mit Trisomie 21

Literatur

Oliver Sacks: »Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte«
ISBN: 978-3-499-18780-3

Geschichte des alltäglichen Rechnens

Wenn wir uns mit der historischen Dimension der Themen Mathematik, Rechnen und Zählen beschäftigen, dann erkennen wir schnell, dass sie menschliche Aktivitäten sind, die bis in die Ursprünge des Menschseins reichen. Das Rechnen ist eine kulturelle Fähigkeit, die sich im Zusammenspiel mit der Entwicklung der Sprache herausgebildet hat. Denn das Zählen und das Benennen von Dingen sind miteinander verwandt. Wir *erzählen* Geschichten und *zählen* Steine, Muscheln oder Glasperlen. Schon am Wortstamm erkennt man, dass es einen tieferen Zusammenhang zwischen diesen beiden Aktivitäten gibt. Erst die Sprache ermöglicht das Denken in abstrakten Begriffen. Die Fähigkeit, abstrakt zu denken, benötigen wir, um uns die Fähigkeit des Rechnens anzueignen. Wir haben weiter oben bereits gesehen, dass die Vorstufe der Kommunikation darin liegt, gemeinsame Ordnungen oder Muster festzulegen. Auch hier benötigen wir zunächst wieder die grundlegende Fähigkeit, Muster überhaupt zu erkennen.

Wir können also sagen: Denken und Rechnen sind wie zwei Seiten einer Medaille. Wir kommen ohne sie in der menschlichen Gesellschaft nicht aus. Die Mathematik entsteht dann im Übergang vom Zählen zum Herstellen von Beziehungen zwischen Mengen.

Der Ursprung des Rechnens im Alltag lag in ganz unterschiedlichen Anwendungsbereichen. Landvermessung und Architektur waren neben der Eigentumsbestimmung und -verteilung und der Astronomie die wichtigsten praktischen Disziplinen. Der Nutzen, den diese Bereiche für die allgemeine Bevölkerung hatten, war sehr groß. Straßenbau, Deichanlagen, Schifffahrt wären ohne praktische Kenntnisse der Mathematik ebenso wenig möglich gewesen wie die Errichtung von Kirchen, Schlössern oder Kathedralen. Für viele dieser Gebiete gab es spezielle Hilfsmittel, Karten und Tabellen, um Berechnungen durchzuführen.

Nicht zu vergessen ist auch, dass die Menschen bei der Anwendung der Rechentechniken immer wieder in verschiedenen Strukturen denken mussten. Denn neben den linearen Berechnungen war es auch dringend notwendig, in Zyklen zu rechnen. Nur so konnten z. B. astronomische

Berechnungen für Kalenderangaben aufgestellt werden. Diese Rechnungen waren sehr komplex und mussten mit großer Genauigkeit durchgeführt werden. Denn von der Berechnung der günstigsten Zeit für die Aussaat und die Ernte hing viel für die Menschen ab. Für die Berechnungen in Zyklen wird übrigens keine Null benötigt.

Da die Mathematik in ihren Anfängen immer mit alltäglichen und praktischen Aufgabenstellungen zusammenhing, wurde sie zunächst als eine besondere Form des Schreibens oder Denkens angesehen. So waren z. B. die Schreiber in der babylonischen Zeit diejenigen, die auch kleine Rechnungen ausführen konnten. Die Mathematik galt lange Zeit als eine Hilfswissenschaft, bis die Griechen damit begannen, sie um ihrer selbst willen zu betreiben, sie als eine eigenständige Wissenschaft anzusehen und sie ausgehend von wenigen Basisaussagen – den Axiomen – logisch aufzubauen.

Zahlen und Rechnen

Die Arithmetik ist die Grammatik der Zahlen.

Ludwig Wittgenstein

Das Fundament des Gebäudes der Mathematik ist das Zahlenbewusstsein der Menschen. Aus diesem Bewusstsein heraus entwickelten sich zuerst das Zählen, das Teilen und das Bedürfnis zum Planen. Der Wunsch, gerecht, also anteilig und nachvollziehbar zu teilen, spielte eine große Rolle. Das ist eins der überraschenden Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung in demjenigen Bereich der Mathematik, der mit Methoden aus der Spieltheorie und der Graphentheorie das soziale Verhalten der Menschen wissenschaftlich untersucht. Hierbei wurde festgestellt, dass für die Menschen nicht immer nur der eigene Vorteil oder der Vorteil der eigenen Gruppe die ausschließliche Motivation seines Handelns ist.

Menschen und einige wenige Tiere besitzen die natürliche Fähigkeit, die Anzahl einer kleinen Menge instinktiv zu erkennen. Das gilt jedoch

nur für sehr kleine Zahlen. Zahlen sind ein Begriff des Geistes, sie existieren nicht in der real erfahrbaren Umwelt. Nur der Mensch mit seinen intellektuellen Voraussetzungen entwickelte daraus in einem langen Prozess die Fähigkeit des Rechnens und des abstrakten, logischen Denkens. Zunächst erlernten die Menschen die Fähigkeit, größere Mengen zu zählen, in dem sie diese mit Kieselsteinen, Muscheln, Kerben oder Ähnlichem verglichen. Die ältesten Funde von Knochen, die Kerben enthalten, welche als ein elementares Zählen zu werten sind, sind über 30 000 Jahre alt. Es existieren archäologische Funde von kleinen Tonbehältern, die eine bestimmte Anzahl kleiner Kugeln enthalten. Mit den Kugeln in diesen Tonbörsen verglichen die Hirten und Schäfer die Anzahl ihrer Tiere. Obwohl sie nicht zählen konnten und keine Vorstellung darüber hatten, was eine abstrakte Zahl wie fünfundfünfzig bedeutet, konnten sie durch den direkten Vergleich ihrer Tiere mit den Kugeln feststellen, ob ein Tier fehlte oder ob sich ein fremdes Tier der Herde angeschlossen hatte. Später kam den Menschen die Idee, bestimmte Zahlen durch Gebärden oder Worte zu ersetzen. Menschliche Gesellschaften, die keinen Besitz kannten, benötigten das Ordnungsprinzip der natürlichen Zahlen nicht. Sie kamen mit den Zahlen eins, zwei, viele aus. Das heißt aber nicht, dass diese Menschen für andere kulturelle Begebenheiten, die für sie wichtig waren, nicht doch mathematische Werkzeuge verwendeten (siehe das Kapitel Ethnomathematik).

Die vier Grundrechenarten – Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division – leiten sich direkt aus den Bedürfnissen der Menschen her, die gewonnen Erkenntnisse weiter zu entwickeln. Nachdem z. B. Besitztümer und Nahrungsertrag dokumentiert wurden, wollte man auch den Zuwachs, die Abnahme oder das Verteilen dokumentieren und festhalten. So sind unmittelbar die vier Grundrechenarten entstanden. Zunächst die Addition, dann ihr Gegenteil: die Subtraktion, d. h. das Abziehen von Zahlen. Die Multiplikation leitet sich aus einer mehrfach ausgeführten Addition ab. Ihre Regeln kann man als vereinfachte Additionsregeln betrachten und ihre gegensätzliche Operation ist die Division.

Infobox – Zahlen und Grundrechenarten

Literatur

Georges Ifrah: »Universalgeschichte der Zahlen«

ISBN: 978-3-86150-704-8

Umfassendes und spannend geschriebenes Buch über die Geschichte der Zahlen, Ziffern, Rechensystem und Hilfsmittel.

Das kannst du dir an einer Hand abzählen – Zahlensysteme

*Wenn du den Daumen den Zeigefinger besteigen lässt,
wie einer, der einen Pfeil ergreift so ist das die 60.*

al-Mawsik al Hanbali

Wir alle kennen den Spruch: »Das kannst du dir an einer Hand abzählen.« Und genauso haben die Menschen das bewusste Zählen begonnen: Mit den Fingern einer Hand, mit zwei Händen, manchmal weiter mit den Zehen oder auch mit anderen Körperteilen.

Wenn wir aber jeder Zahl ein eigenes Symbol oder eine eigene Bezeichnung zuordnen möchten, stoßen wir schnell an Grenzen. Der Mensch hat einen Weg gefunden, um alle Zahlen mit relativ wenigen Symbolen darzustellen: die Zahlensysteme. Das aktuell am weitesten verbreite Zahlensystem beruht auf der Zahl zehn, das Dezimalsystem. Zuerst erhalten die ersten zehn Zahlen einen eigenen Namen und dann werden die Zehnerpotenzen benannt. Durch Zusammensetzen erhalten wir alle weiteren Namen der ganzen Zahlen. Wahrscheinlich wird die Basis 10 so häufig verwendet, weil wir mit Hilfe unserer zehn Finger mit dem Rechnen begonnen haben. In der Universalgeschichte der Zahlen heißt es daher treffend, die erste Rechenmaschine war die Hand. Die Finger dienten über Jahrhunderte nicht nur zum Zählen, sondern auch zum Rechnen. Nicht nur Addition und Subtraktion, auch Multiplikation und Division waren mit ihnen möglich. Wie Dokumentationen auf Gemälden und Münzen sowie in der Geschichtsschreibung und Poesie zeigen, konnten die verschiedensten Völker und Kulturen Zahlen mit bis zu 5 Stellen durch

spezielle Finger- und Armstellungen anzeigen. Auch Rechenoperationen in dieser Größenordnung wurden blitzschnell durchgeführt. Aus dieser Rechentechnik leitete sich ein Zahlenfingerspiel ab, das über Jahrhunderte in den unterschiedlichsten Kulturen und Bevölkerungsgruppen sehr beliebt war. Es war das Moraspiel, das selbst Fremde miteinander spielten. In der Universalgeschichte der Zahlen wird es folgendermaßen beschrieben: Zwei Spieler zeigen auf ein bestimmtes Signal hin mit den Fingern eine Zahl zwischen 1 und 10 und rufen dabei gleichzeitig eine Zahl. Wenn diese Zahl der Summe aller ausgestreckten Finger entspricht, gewinnt man einen Punkt.

Ziffern und Zahlen

Umgangssprachlich unterscheiden wir im Deutschen kaum zwischen Ziffern und Zahlen. Der Begriff Ziffer kommt – wie unsere modernen Zahlen – von dem arabischen Wort »siffr« für Null. Die Ziffer ist das schriftliche Zeichen, das wir für die Darstellung von Zahlen verwenden. Die Zahl 23 besteht also aus den beiden Ziffern 2 und 3. Eine Zahl dagegen ist ein abstrakter Begriff. Es gibt Zahlen, die wir intuitiv verstehen, etwa die natürlichen Zahlen oder die Brüche als Darstellung von Verhältnissen. Daneben gibt es sehr viele weitere Zahlen, die jeweils besondere mathematische Eigenschaften haben. Manche bilden eine eigene Menge, wie z. B. die Primzahlen, manche sind eigenständig wie etwa die Zahl π oder die Eulersche Zahl.

Zuerst fasste man unter den Begriff »Zahl« eine natürliche Zahl, also eine positive ganze Zahl. Dann entdeckten die Menschen die negativen Zahlen und die Brüche. Auf die Brüche, also die rationalen Zahlen, stießen sie durch die sogenannten Verhältnisse oder auch Proportionen, beispielsweise durch ein Rechteck mit einer Länge zwei und einer Breite drei. Diese Verhältnisse wurden in den verschiedenen Kulturen unterschiedlich ausgedrückt, und die Mathematiker erkannten, dass sie auch mit diesen Verhältnissen rechnen konnten. Sie konnten addieren und multiplizieren.

Erst um 1870 entstand ein Zahlenkonzept, das auch *irrationale Zahlen* zulässt. Die irrationalen Zahlen sind solche Zahlen, die sich nicht als

Brüche darstellen lassen. Sie haben unendlich viele Nachkommastellen. Die bekannteste irrationale Zahl ist sicher die Zahl π (π), die zur Kreisberechnung benötigt wird. Sie entspricht dem Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser eines Kreises und wurde schon ca. 2000 Jahre vor Christus in der Mathematik erwähnt. π ist ungefähr (\approx) 3,141 592. Es gibt richtige Wettbewerbe darum, immer weitere Nachkommastellen der Zahl π genau zu bestimmen. Aber gleichgültig, wie viele die Mathematiker finden, immer bleibt es eine Annäherung, weil π unendlich viele Nachkommastellen besitzt. Dennoch ist π eine unveränderbare Zahl, eine sogenannte Konstante.

Eine weitere sehr wichtige irrationale Zahl ist die Zahl e oder auch 2,718 281 828 450 945 ..., die bereits als ein Element der schönsten Formel vorgestellt wurde. Sie tritt bei der Zinseszinsberechnung und bei vielen physikalischen Problemstellungen auf. In der Physik ist nicht nur das Beschreiben von Größen wichtig, sondern auch die Veränderungen dieser Größen, die Differentiale. Beim radioaktiven Zerfall etwa gilt, je mehr das Material strahlt, desto mehr zerfällt auch die Menge, das heißt, desto rascher ändert sie sich. Untersucht man die Zusammenhänge zwischen Größen und ihre Veränderungen, dann werden sie oft durch Exponentialgleichungen beschrieben, und die Mutter aller Exponentialgleichungen ist die e -Funktion e^x . Die e -Funktion ist die einzige Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Aus diesem Grund ist e eine herausragende Zahl. Sie ist gewissermaßen das Neutrum der Differentialwelt; eine ähnliche Rolle spielen die 0 für die Addition und die 1 für die Multiplikation.

Obwohl die irrationalen Zahlen schon sehr früh auftauchten, wurde ihre Existenz doch lange bestritten und verheimlicht. Ein Schüler des griechischen Mathematikers Pythagoras soll ertränkt worden sein, weil er bezweifelte, dass die Wurzel aus zwei eine rationale Zahl ist. Der historische Beweis, dass die Wurzel aus zwei irrational ist, gehört zu den ersten Widerspruchsbeweisen, mit denen wir in der Schule konfrontiert werden, und wird im Anhang dieses Buches skizziert. Auch die Einführung der Null war sehr umstritten und zog sich über Jahrhunderte hin.

Zyklische Abläufe

Wenn wir an Rechnen oder Berechnen allgemein denken, beziehen wir uns zunächst fast ausschließlich auf die lineare Berechnung. Damit sind Rechnungen gemeint, die sich in einem Zahlenbereich bewegen, der mit der Null oder mit einer negativen Zahl beginnt und dann beliebig hoch gezählt wird. Allerdings spielten schon sehr früh in der menschlichen Geschichte zyklische Berechnungen eine Rolle. Ein Zyklus ist ein Kreislauf, in dem ähnliche Ereignisse immer wieder erfolgen, z. B. der Sonnenauf- und Sonnenuntergang. In der Natur wiederholen sich sehr viele Prozesse in regelmäßigen Abständen. Um Fruchtbarkeitszyklen von Mensch, Tier und Pflanze zu bestimmen, waren Kalenderberechnungen von großer Bedeutung; diese beruhten auf zyklischen Berechnungen. Bei der Festlegung der Termine von Riten und Gebräuchen im Alltagsleben der Menschen spielten sie ebenso eine Rolle wie bei der Schifffahrt oder der Bestimmung von Reiserouten. Bei der Orientierung im Gelände, etwa bei einem Jagdzug oder bei jahreszeitlich bedingten Wanderung, spielten Mischformen aus linearen und zyklischen Überlegungen eine Rolle.

Zyklische Abläufe wie z. B. Kalenderberechnungen erforderten andere Überlegungen als lineare Abläufe. Das erleben wir jedes Jahr gleich zweimal, wenn die Uhren in der Sommerzeit vorgestellt und im Herbst wieder zurückgestellt werden.

Ähnlich wie beim fortlaufenden Zählen konnten die Finger auch eingesetzt werden, um zyklische Abläufe nachzuvollziehen. So gab es in Asien bei Frauen eine Tradition, die die Anzahl der Fingerglieder nutzte, um den weiblichen Zyklus abzuschätzen. Eine Schnur wurde um jedes der Fingerglieder geknüpft, bis nach 28 Tagen alle Fingerglieder markiert waren. Aber auch die Berechnung von Schaltjahren, die Zählung von Gebeten und weitere Rechenoperationen wurden mit den Fingergliedern durchgeführt.

Geometrie

Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.

David Hilbert

In der Schulmathematik ist die Geometrie ein zentrales Themenfeld der Mittelstufe. Sie zählt zu den ältesten Anwendungsgebieten der Mathematik. Aus der Herkunft des Wortes Geometrie, das »Vermessung der Erde« bedeutet, ist zu erkennen, dass die Geometrie ihren Ursprung in der Landvermessung hat. Aber schon die frühgeschichtlichen Kulturen wandten die Erkenntnisse der Geometrie auf den Bau von Gebäuden, Skulpturen und Gebrauchsgegenständen an. Ägypter und Babylonier waren die ersten Hochkulturen, die schriftliches Wissen über geometrische Zusammenhänge hinterließen. Die Griechen gaben sich nicht mehr nur mit Anwendungen und Problemlösungen zufrieden. Sie begannen damit, die Erkenntnisse in ein theoretisches »Gerüst« einzuarbeiten. Sie stellten Axiome auf und verlangten, dass durch logische Schlüsse alle weiteren Aussagen »bewiesen« wurden. Diese vor vielen tausend Jahren in der Geometrie entwickelten Arbeitsmethoden bestimmen noch heute die Arbeits- und Vorgehensweise in der Mathematik. Die erste systematische Zusammenstellung des geometrischen Wissens einer ganzen Epoche verdanken wir Euklid von Alexandria (vermutlich 365 vor Christus – 300 vor Christus), der in seinem mehrbändigen Werk »Elemente« dieses Wissen zusammenfasste. Dabei führte er zunächst die grundlegenden Definitionen und Axiome ein, mit deren Hilfe er anschließend die geometrischen Sätze ableitete. Über viele Jahrhunderte bis ins 19. Jahrhundert waren die »Elemente« nach der Bibel das meistverbreitete Werk der Weltliteratur.

Die Geometrie, mit der wir in der Schule in Kontakt kommen, umfasst nur einen kleinen Teil der komplexen mathematischen Disziplin, die so genannte euklidische Geometrie oder auch darstellende Geometrie. In der wissenschaftlichen Mathematik bezieht sich der Begriff auf mehrere große Teilgebiete, die sehr abstrakt hergeleitet werden.

Die Werkzeuge der alten Griechen waren weniger Stift und Papier als Zirkel und Lineal. Die altgriechischen Mathematiker sahen zwischen den Formen und den Zahlen tiefe mystische Beziehungen. Mit den Zahlen meinten sie ausschließlich die natürlichen Zahlen und die Verhältnisse – für uns heute die Brüche.

Eine sehr alte Anwendung geometrischer Figuren, die wir in den verschiedensten Kulturen finden, sind die Mosaike oder die Parkettierungen. Das Mosaik ist ein schon seit der Antike angewendetes Kunsthandwerk, bei dem farbige Steine oder Glasstücke zu Ornamenten oder auch Bildmotiven zusammengefügt werden. Für die Mathematik stellt sich dann immer die Frage, mit welchen Figuren die Ebene ohne Überlappungen oder Auslassungen ausgefüllt werden kann. Dies ist eine Problemstellung, die auch in anderen traditionellen Kunsthandwerken wie z. B. beim Teppichknüpfen, beim Weben, bei sonstigen Textilarbeiten aber auch bei Keramikarbeiten auftaucht.

Infobox – Geometrie

Webtipps

Infoseiten zum Satz des Pythagoras:

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Gut_Ref/Pythago/Pythagoras.html

http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

<http://www.geometrie.net>

Jede Menge Fotos und graphische Darstellungen, darunter einige bewegte Animationen, zu den bekannten Sätzen und Formeln der Schulgeometrie

<http://wunderland.hirnwindungen.de>

Eine weitere Internetseite mit Animationen und graphischen Darstellungen der Schulgeometrie

Die Entdeckung der Null und der Unendlichkeit

Die Null ist der Zwillig der Unendlichkeit

Buchtitel, Charles Seife

Die Null ist uns so vertraut, dass uns die Vorstellung, es könnte sie nicht geben, absurd vorkommt. Sie wirkt so unscheinbar, aber ihr Wesen ist widersprüchlich. Die Null ist eine ganz besondere Zahl. Eine versehentliche Division durch Null kann eine Katastrophe auslösen und viel Schaden anrichten, denn die Null ist in der Lage, das Gerüst der Logik zu zerstören. Die Null weigert sich, größer zu werden. Beim Multiplizieren mit der Null schnurrt die Zahlengerade auf einen Punkt zusammen, und beim versehentlichen Dividieren stürzt unsere mathematische Logik in sich zusammen. Robert Kaplan beschreibt in seinem Buch »Die Geschichte der Null« ihr widersprüchliches Wesen sehr treffend mit folgenden Sätzen: »Betrachtet man eine Null, sieht man nichts. Blickt man aber durch sie hindurch, so sieht man die Welt.« Auf dem Weg zur Entdeckung und alltäglichen Verwendung der Null wurden die grundlegenden Theorien von Philosophie, Religion und Mathematik immer wieder in Frage gestellt.

Es gibt viele Aufgaben, die wir sehr gut ohne die Null berechnen können. So verwundert es nicht, dass z. B. die Ägypter als begnadete Landvermesser und Architekten die Grenzen der Felder nach jeder Überflutung durch den Nil neu berechneten und die geheimnisvollen Pyramiden errechneten und konstruierten, ohne dabei die Null zu benötigen. Bei den Griechen, diesen puristischen Philosophen, die sich in abstrakte und theoretische Überlegungen vertieften, irritiert es eher, dass sie die Bedeutung der Null nicht erkannten. Allerdings war ihre Beschäftigung mit den Zahlen oft auch so mystisch überhöht, dass sie versuchten, bestimmte Wahrheiten zu verheimlichen, damit die Harmonie nicht zerstört würde. Dass eine einfache Zahl wie die Diagonale eines Quadrats mit der Länge 2 (also die Wurzel aus 2) weder als natürliche Zahl noch als ein Verhältnis von zwei natürlichen Zahlen (also als Bruch) darstellbar ist, versuchten sie lange zu verbergen (siehe Beweis im Anhang).

In der hinduistischen Religion spielt die Leere eine große Rolle. Die Gottheit Shiva symbolisiert ebenso Schöpfer als auch Zerstörer der Welt. Sie wird oft mit einer Trommel in einer Hand, als Symbol für die Schöpfung, und mit einer Flamme in einer anderen Hand, als das Symbol für die Zerstörung, dargestellt. In einer Kultur, in der die Welt aus dem Nichts entstand und es das Ziel des Menschen ist, dieses Nichts wiederzuerlangen, war der Gedanke, eine Null einzuführen, sehr viel naheliegender als in unserer Kultur, die so sehr auf die Theorien von Aristoteles basiert. Dessen Weltbild ist von der zentralen Aussage »Es gibt keine Leere« geprägt.

Nicht nur eine, sondern gleich zwei Symbole für die Null waren bei den Maya in Gebrauch. In der Geschichte und der Religion der Maya spielten verschiedene Kalender mit ausführlichen Berechnungen eine große Rolle. Bei ihren Datumsangaben verwendeten die Maya daher eine ordinale Null, die den Beginn einer Zeitspanne anzeigt, z. B. den nullten Tag eines Monats. Eine kardinale Null, die die Maya ebenfalls verwendeten, verweist dagegen darauf, dass etwas abgeschlossen wird. Sie entspricht der Null in einem Stellenwertsystem.

Die Null einzuführen, um mit ihr einen »Platzhalter« zu symbolisieren, der einen Leerraum beim Darstellen einer Zahl versinnbildlicht, ist hingegen nicht so gefährlich. Beim Rechnen mit dem Abakus oder generell bei unserem Zahlensystem besteht die Problematik, dass wir eine leere Stelle mit einem Symbol belegen müssen, um Verwechslungen von Zahlen zu vermeiden. 601 ist eben nicht 61.

Zu einem vollständigen Rechensystem gelangt man erst, wenn man die Zahlen nicht mehr ausschließlich nach ihrer geometrischen Bedeutung bewertet. Dann benötigt man auch eine Null als richtige Zahl. Diese Null ist gefährlicher als ein Platzhalter. Sie ist die Zahl, die z. B. die positiven Zahlen von den negativen trennt. Oder die gerade Zahl, die der eins vorausgeht. Aber eine Zahl, die sich so gar nicht wie andere Zahlen verhält, ist unheimlich.

Im christlichen Europa gab es lange Zeit eine urtümliche Angst vor der Null, denn sie symbolisierte die Leere und das Chaos. In der arabischen Welt hatte es die Null etwas einfacher, dort gab es weniger Wider-

stände gegen die Leere, die die christliche Welt mit Chaos gleichsetzte. Zum ersten Mal erwähnt wurde ein Dezimalsystem mit der Null und negativen Zahlen in einem Text des indischen Astronomen Brahmagupta von 628 – das Brahmasputasiddhanta. Forscher in Europa mussten sich damals – und noch Jahrhunderte später – ohne diese Konzepte abmühen. Auch bedingt durch die ablehnende Haltung der christlichen Kirche des Mittelalters gegenüber Importen aus der arabischen (in Wirklichkeit indischen) Welt fand die indische Zahlenlehre erst im 16. Jahrhundert weitere Verbreitung.

Die Kaufleute waren die ersten, die bemerkten, welche Vorteile die arabischen Ziffern und die Null beim Rechnen boten. Sie führten die Null ein. Die Machthaber verboten die arabischen Zahlen und gaben als Grund an, man könne diese leicht fälschen, also z. B. leicht aus der 0 eine 6 machen. Viel hat sich also gegenüber früher nicht verändert: Wenn den Mächtigen etwas nicht gefällt, dann suchen sie Begründungen, warum sie die Neuerungen nicht annehmen möchten.

Bei astronomischen, also zyklischen Berechnungen benötigten die Menschen, wie bereits erläutert wurde, keine Null. Aber beim Rechnen mit dem Abakus entstand die Problematik, dass ein Symbol, wenn es an einer anderen Stelle stand, eine andere Zahl bedeutete. Um eine leere Stelle auszufüllen, wurde das Symbol der Null erfunden.

Hat man die Null aber erst einmal akzeptiert, ist es zur Unendlichkeit nicht mehr weit. Der Zwilling der Null – die Unendlichkeit – hält einige Überraschungen für uns bereit. Das von Aristoteles verwendete griechische Wort »apeiron« stand für »grenzenlos, unbestimmt«, aber auch für das Chaos, aus dem die Welt entstanden ist. Zu Beginn unserer Zeitrechnung wurde unendlich mit dem göttlichen »Einen« identifiziert. Im Mittelalter wurden metaphysische Reflexionen zur Natur des Unendlichen angestellt, aber es wurde lange vermieden, sich der Natur des Unendlichen wissenschaftlich zu nähern.

Obwohl das Unendliche in der Natur nicht vorkommt, ist es in der Mathematik allgegenwärtig. Schon bei der elementarsten mathematischen Tätigkeit, dem Zählen, begegnen wir dem Unendlichen – in diesem Fall das potenziell Unendliche. Es gibt immer einen weiteren Schritt. Über

viele Jahrhunderte hatten die Wissenschaftler eine große Scheu davor, das Unendliche zu akzeptieren. Der große Durchbruch kam im 17. und 18. Jahrhundert, als die Physiker die Bewegungen und Geschwindigkeiten mit mathematischen Werkzeugen zu erfassen begannen. Die Fallgesetze und die Beschleunigungen stellten sie vor Probleme, die sie mit dem Zulassen von unendlich kleinen Änderungen formalisieren konnten.

Infobox – Die Entdeckung der Null und der Unendlichkeit

Literatur

Robert Kaplan: »Die Geschichte der Null«
ISBN: 978-3-492-23918-9

Charles Seife: »Zwilling der Unendlichkeit – Eine Biografie der Zahl Null«
ISBN: 978-3-442-15054-0

Geheimnisvolles Rechnen – Codierung

*Wirkliche Mathematik spielt für den Krieg keine Rolle.
Bislang hat niemand einen kriegerischen Nutzen der Zahlentheorie entdeckt.*

Godfrey Harold Hardy (1877–1947)

Während es in den anderen Naturwissenschaften traditionell viele Geheimnisse gibt und zum Teil eine ganze Kultur rund um deren Geheimhaltung erschaffen wurde, die auch heute noch bis zur Patentanmeldung gewahrt bleiben, gab es in der Mathematik immer schon zwei Seiten der Medaille. Einerseits war die Mathematik eine offene und sehr freie Wissenschaft. Der offene Wettbewerb um die Lösung bekannter und allgemein anerkannter Probleme war über Jahrhunderte eine kulturelle Praxis der Mathematik. Ihre dunkle, verborgene Seite hingegen, die Kryptographie, wurde hinter verschlossenen Türen in geheimnisvollen Abteilun-

gen der Militärs betrieben. Wie dem einführenden Zitat zu Beginn dieses Abschnitts zu entnehmen ist, war der englische Mathematiker Godfrey Harold Hardy noch 1940 der Ansicht, dass die Zahlentheorie ausschließlich einen theoretischen und abstrakten Charakter besitzt. Schon bald sollte sich zeigen, dass sie sich im Rahmen der Kryptographie in der Mitte des Zweiten Weltkriegs zur eigenständigen Kriegswissenschaft entwickelte. Die Geschichte der Entschlüsselung der deutschen Chiffriermaschine Enigma im 2. Weltkrieg durch britische Wissenschaftler ist eines der spannenden Paradebeispiele in der Geschichte der Codiertechnik und einer breiten Öffentlichkeit durch Romane und Filme bekannt.

Heute ist die Verschlüsselungstechnik für Politik und Wirtschaft von enormer Bedeutung. Verfahren und Patente, die es möglich machen, Datenübertragungen im Bankverkehr oder bei Regierungsnetzen sicher und dennoch effizient zu verschlüsseln, sind gefragt wie nie und daher auch entsprechend teuer und umsatzträchtig.

Texte und Botschaften zu verschlüsseln ist ein Anliegen, das die Menschen von der Erfindung der Schrift bis heute beschäftigt. Während wir heute mit raffinierten Algorithmen E-Mails verschlüsseln, so waren es früher einfachere mathematische Verfahren, mit denen Staatsgeheimnisse, Liebesbotschaften oder Rezepturen codiert wurden. Der Wunsch, den verschlüsselten Code des Gegners zu knacken und gleichzeitig für sich selbst einen immer stärkeren Code zu entwickeln, hat die Mathematik auf vielen Gebieten vorangebracht.

Zunächst waren es geheime Botschaften, die listig versteckt hinter einer Wachsschicht oder ähnlichem auf denjenigen warteten, der die Botschaft finden sollte. Der große Nachteil einer solchen Übermittlung war jedoch, dass die Botschaft in die »falschen Hände« geraten konnte. Dann war das ganze Geheimnis aufgefliegen, die Liebschaft verraten oder die Schlacht verloren. So erfanden die Menschen verschiedene Möglichkeiten, ihre Botschaften zu verschlüsseln. So etwa die Transposition, bei der die Buchstaben einer Nachricht anders angeordnet werden, oder die Substitution, bei der jedem Buchstaben ein anderer Buchstabe zugeordnet wird. In der Botschaft, die übermittelt wird, wird dann der zugeordnete Buchstabe verwendet.

Beispiel für die Transposition:

»Claudia« wird zu »Bkztchz«, wenn die Buchstaben einfach um einen Buchstaben vorgestellt werden.

Beispiel für die Substitution:

a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-m-n-o-p-q-r-s-t-u-v-w-x-y-z

a-z-b-y-c-x-d-w-e-v-f-u-g-t-h-s-i-r-j-q-k-p-l-o-m-n

Dann wird »Claudia« »Bfakyea« geschrieben.

Bei diesen Verfahren mussten sich Sender und Empfänger der Botschaften immer im Voraus auf die Art der Verschlüsselung einigen, damit sie sich verständigen konnten. Jahrhunderte lang war es dann ein Wettrennen, wie so ein Schlüssel »geknackt« werden konnte.

Im 19. Jahrhundert wurde damit begonnen, die neu gewonnen Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Häufigkeitsanalyse für die Entschlüsselung von Botschaften einzusetzen. Das war möglich, da die einzelnen Buchstaben in einem Text unterschiedlich häufig vorkommen. Ein seltener Buchstabe, wie in der deutschen Sprache z.B. das X oder das Y, hat eine ganz andere Häufigkeitsverteilung als etwa die Vokale.

Kryptographie mit Öffentlichen Schlüsseln

In den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts kam es dann zu einer radikalen neuen Entdeckung. Bis dahin gab es immer nur eine Form der symmetrischen Verschlüsselung, d.h. die Entschlüsselung war immer die Umkehrung der Verschlüsselung gewesen. Nun stand eine ganz neue Idee im Raum: Der Verschlüsselungs- und der Entschlüsselungsschlüssel müssen nicht unbedingt identisch sein. Realisiert wird dieses Verfahren, indem der Schlüssel in einen privaten und einen öffentlichen Teil zerlegt wird. Eine Nachricht an eine bestimmte Person wird mit ihrem öffentlichen Schlüssel verschlüsselt, und die Person entschlüsselt diese Nachricht dann mit ihrem privaten Schlüssel. Von der Idee bis zur Realisierung dauerte es allerdings noch ein paar Jahre, denn es musste erst eine mathematische Funktion gefunden werden, die diese Anforderungen erfüllte. Heute ist das Verfahren unter dem Namen Public-Key-Verschlüsselung bekannt und wird z. B. bei der Verschlüsselung von E-Mail-Kommunikation verwen-

det. Das Verfahren fällt unter die Methode der asymmetrischen Verschlüsselung, weil Sender und Empfänger unterschiedliche Schlüssel besitzen. Mathematisch realisiert wird diese Form der Verschlüsselung durch die Verwendung zweier multiplizierter, extrem langer Primzahlen.

Somit wurde seit den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts aus der abstrakten und theoretischen Zahlentheorie, deren Nutzen sich bis dato auf den militärischen Einsatz beschränkt hatte, ein Wissenschaftsfeld mit großer ökonomischer und praktischer Bedeutung. Diese Wandlung bezeichnen manche Wissenschaftler als »Cinderella-Effekt«.

Infobox – Codierung

Literatur

Simon Singh: »Geheime Botschaften. Die Kunst der Verschlüsselung von der Antike bis in die Zeiten des Internet.«

ISBN: 978-3-423-33071-8

Fast die gesamte Geschichte der Verschlüsselungsmethoden beschreibt der Wissenschaftsjournalist Simon Singh in diesem umfangreichen Buch

Wahrscheinlichkeitsrechnung: und er würfelt doch

»Gott würfelt nicht«

Albert Einstein

In der Einleitung zu diesem Buch wurde bereits gezeigt, dass es für die urzeitlichen Menschen ein großer Vorteil war, wenn sie Muster oder Gesetzmäßigkeiten in ihrer Umwelt oder in den Naturerscheinungen entdecken konnten. Aus der Vielzahl der Informationen, die sie verarbeiten mussten, konnten sie sich dann auf einige wenige Informationen konzentrieren. Überlebenswichtige Entschlüsse – z.B. ob sie weiterziehen

oder ihr Winterquartier aufsuchen sollten – ließen sich leichter fassen. Ein anderer großer Vorteil war, dass sie so Erfahrungen kompakter an die Nachkommen weitervermitteln konnten, beispielsweise welche Jagdreviere sie um welche Jahreszeit aufsuchen sollten oder in welcher Richtung sie weiterziehen mussten, um zu einem bestimmten jahreszeitlichen Ereignis an einem bestimmten Ort zu sein.

Obwohl es in der Natur viele Gesetzmäßigkeiten gibt, wie z. B. die Tages- und Jahreszeiten, die Wanderwege der Tiere oder die Fruchtbarkeitszyklen, existieren selbstverständlich eine Vielzahl von Ereignissen, die keinen erkennbaren Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Wie kompliziert die Wechselbeziehung zwischen Gesetzmäßigkeit und Zufall ist, soll am Beispiel eines Blitzeinschlags verdeutlicht werden. Wenn ein Gewitter aufzieht, dann ist z. B. die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, dass es blitzt, aber wo der Blitz genau einschlägt, lässt sich nicht genau vorhersagen. In einem flachen Gelände wird die Wahrscheinlichkeit höher sein, dass der Blitz in den einzigen Baum einschlägt, der dort steht. Aber nicht bei jedem Gewitter wird ein allein stehender Baum vom Blitz getroffen.

Im natürlichen Umfeld der Menschen spielt der Zufall also eine große Rolle. Der Zufall war für die Menschen der Urzeit das gleiche wie für uns heute – das Unbestimmte, das Überraschende; das, wofür sie keine einfache Begründung finden konnten. Zufällige Ereignisse entziehen sich unserem Einfluss und damit unseren Entscheidungen. Das erzeugte Stress und verunsicherte die Menschen; und sie versuchten, durch Religion oder Aberglauben Sinn und Muster in das zufällige Erscheinungsbild der Natur hinein zu interpretieren.

Den Zufall zu erforschen, das schien den Menschen lange Zeit anmaßend und abwegig. So dauerte es bis in die Neuzeit, bis sich die Menschheit anschickte, dem Zufall auf wissenschaftliche Art näher zu kommen. Zaghaft versuchten die ersten Mathematiker ab 1500, die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls bei Experimenten mit Glücksspielen, z. B. Würfelspielen oder Münzwerfen, zu erforschen. Bei diesen eingeschränkten Risiken entdeckten sie die greifbaren Elemente des Zufalls: Die Gesamtheit aller möglichen Ereignisse (bei einem Würfel sind das sechs) stand der Gesamtheit aller für eine betroffene Person günstigen Ereignisse gegen-

über. Diese Gegenüberstellung führte zu der Möglichkeit, Chancen und Risiken zu berechnen. Daraus entstand schließlich der Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jetzt stand fest: Die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls lassen sich mit mathematischen Methoden bearbeiten. Um die Gesamtheit aller Ereignisse und die der günstigen Ereignisse auszurechnen, werden mathematische Methoden aus der Kombinatorik verwendet. Die Gesamtheit aller möglichen Ereignisse wird dabei der Gesamtheit der günstigen Ereignisse gegenüber gestellt. Plötzlich lassen sich Chancen und Risiken errechnen und somit gegenseitig abwägen. Die Kaufleute hatten ein großes Interesse daran, die Größe der Risiken gegen den zu erwartenden Gewinn abzuschätzen und bedienten sich schnell der Kenntnisse, die die Mathematiker aus den Glücksspielen gewonnen hatten.

Nachdem der Anfang getan war, entwickelte sich rasch ein Interesse daran, auch gesellschaftliche und wirtschaftliche Problemkreise besser abschätzen zu können. Im 17. Jahrhundert entdeckte Bernoulli das Gesetz der großen Zahlen, als er sich mit Massenergebnissen beschäftigte.

Im 18. Jahrhundert stellte man sich bereits die Frage, wie man auf der Grundlage von Beobachtungsdaten auf die Wahrscheinlichkeit schließen könne. Obwohl die Wahrscheinlichkeitsrechnung lange nicht als mathematische Disziplin angesehen wurde, fand sie sehr schnell und mit großem Erfolg Anwendung im Versicherungswesen und beim Errechnen von kaufmännischen Risiken. Das Gesetz der großen Zahlen erlaubt innerhalb einer bestimmten Toleranzgrenze eine Vorhersage über den Eintritt des Schadenfalls. Je größer die Zahl der Versicherten ist, die von der gleichen Gefahr bedroht sind, desto genauer kann die Höhe des Gesamtschadens bestimmt werden. Obwohl man selbstverständlich nie vorhersehen kann, welcher Versicherte einen Schadensfall erleiden wird, lässt sich das gesamte Risiko sehr genau berechnen. Genau dies ist der Zweck einer guten Risikokalkulierung.

In der Physik spielte der Zufall lange Zeit keine Rolle. Im Weltbild des englischen Universalgelehrten Isaac Newton wurde unsere physikalische Umwelt mit einem Uhrwerk verglichen: Einmal aufgezogen, ergeben sich alle Positionen und Bewegungen aus den vorausgegangenen. Die Physiker waren sich sicher, dass sie die Position und Bewegung aller Molekü-

larteilchen unseres Universums zu jedem Zeitpunkt berechnen könnten, wenn sie über die Information zu einem bestimmten Zeitpunkt verfügten. Zufälle waren in diesem Weltbild einfach noch Gesetze, die die Menschen noch nicht oder zu ungenau erkannt und beschrieben hatten. Aber es sollte sich bald herausstellen, dass dieses Weltbild Lücken aufwies.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts nahm das Interesse der Physiker an statistischen Methoden und der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer stärker zu und bald sollte sich herausstellen, wie falsch der Physiker Albert Einstein in diesem Zusammenhang mit seinem berühmten Ausspruch »Gott würfelt nicht« lag. Die Atomphysiker fanden in ihren Modellvorstellungen vom Aufbau der Atome immer mehr Aspekte, bei denen die Wahrscheinlichkeit und der Zufall eine bestimmende Rolle spielen. Das Verhalten von Atomen und Molekülen konnte mit statistischen Berechnungen gut beschrieben werden. Wer auch immer für die Entstehung unseres Universums verantwortlich ist: Die Bausteine aller Materie in diesem Universum sind zufällig aufgebaut.

Heute arbeiten fast alle Wissenschaften mit Wahrscheinlichkeitsrechnungen oder statistischen Berechnungen. Hypothesen werden aufgestellt und anschließend mit ausgewählten statistischen Methoden ausgewertet, um festzustellen, ob sie signifikant sind, d. h. ob die Irrtumswahrscheinlichkeit unter einer vorher angegebenen Größe liegt.

Heute wissen wir, dass viele Größen in unserem Leben auftreten, die wir Durchschnittswerte nennen. Von praktischer Bedeutung ist dann für uns, dass die Werte zwischen festgelegten Toleranzgrenzen bleiben. Das gilt für Wasserstände genauso wie für die Zahl von Schiffskatastrophen oder die Größe eines Neugeborenen.

Infobox – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Literatur

Stefan Klein: »Alles Zufall«, ISBN: 3-499-61596-7

Ein informatives, verständlich geschriebenes Buch rund um den Zufall.

Hilfsmittel

Wer gewohnt ist, seine Angelegenheiten mit dem Rechenschieber zu erledigen, kann einfach die gute Hälfte aller menschlichen Behauptungen nicht ernst nehmen.

Robert Musil – Der Mann ohne Eigenschaften

Hilfsmittel spielten im Laufe der Geschichte von Rechentechniken eine große Rolle. Heute werden die meisten Rechnungen mit Computern durchgeführt. Aber bis dahin war es ein weiter Weg. Genaue Berechnungen durchzuführen erforderte große Konzentration, unvorstellbar viel Disziplin und jede Menge Zeit. Um sich diese Anstrengungen zu erleichtern, bedienten sich die Menschen verschiedener Hilfsmittel.

Wie in den vorhergehenden Kapiteln schon gezeigt wurde, begann das Rechnen mit dem Zählen, z. B. mit Kerben in Knochen, Steinchen (calculus), in Tongefäßen oder ganz einfach mit den Fingern. Zahl bedeutete daher zu Beginn der Entwicklung eines mathematischen Verständnisses immer natürliche Zahl, also eine positive ganze Zahl. Die Addition dieser Zahlen ergab sich intuitiv und die Multiplikation war eine mehrfach ausgeführte Addition. Dazu waren zunächst keine komplizierten mathematischen Gesetze notwendig. Dennoch konnten auch diese »einfachen« Operationen schnell so umfangreich werden, dass sie die Verwendung spezieller Hilfsmittel erforderten. Schon die Historie dieser Hilfsmittel ist ein spannendes Unterfangen. Nach dem virtuosen Einsatz der Finger oder den Kerbhölzern wurden Rechenbretter und später auch Wachstafeln zum Zählen eingesetzt.

Ein Hilfsmittel, bei der die Geschwindigkeit beim Rechnen auch durch die Fingerfertigkeit eingeübt wird, ist der Abakus, ein Rechenbrett mit Holzkugeln. Der Abakus wurde seit 500 v. Chr. in vielen Ländern, vor allem in China, Japan, Russland oder bei den Inkas, eingesetzt. Dort gab es das Rechenbrett in leicht abgewandelten Varianten (wie etwa den japanischen Soroban, den russischen Stschoty oder den chinesischen Suan-pan). Die Menschen, die ihn verwendeten, beherrschten ihn virtuos und lösten damit sehr schnell anfallende Rechnungen. Besonders der kaufmännische Bereich eignete sich sehr für den Ein-

satz des Abakus. Abgelöst wurde er erst durch das Aufkommen des Taschenrechners.

Auch Tabellen, Proportionswinkel und der Zirkel werden zu den Rechenhilfsmitteln gezählt. Multiplikations- und Logarithmentafeln waren in vielen Wissenschaften und vor allem bei astronomischen Berechnungen eine Grundlage, die in komplexe Berechnungen mit eingingen. Der Zirkel wurde bei Konstruktionsberechnungen und Ingenieursaufgaben, in der Architektur, bei der Landvermessung und der Navigation eingesetzt.

Aus Rechenstäbchen zum Multiplizieren entwickelten sich dann die ersten mechanischen Additionsmaschinen.

Das Moraspiel, das sich aus der Tradition des Fingerrechnens entwickelte, wurde hier bereits erwähnt. Bis ins Mittelalter war es üblich, Zahlen zwischen 1 und 9999 durch Stellungen beider Hände bei Zwischenrechnungen »dynamisch« zu speichern. Ähnliche Methoden gab es im asiatischen Raum, wie man auf Zeichnungen und Bildern aus vielen Jahrhunderten erkennen kann.

Der Rechenschieber kam Ende des 19. Jahrhunderts bis ungefähr 1970 zum Einsatz. Mit ihm konnten auch schwierige Operationen, wie z. B. Wurzelziehen oder auch Logarithmen, ermittelt werden. Als Erfinder dieser Rechentechnik, bei dem z. B. die Multiplikation und die Division auf die einfacheren Operationen Addition und Subtraktion zurückgeführt werden, gilt der englische Mathematiker William Oughtred (1574–1660). Er soll auch die Abkürzungen \sin , \cos und \tan für die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens eingeführt haben.

Heute ist uns der Gebrauch des Computers (engl. to compute = rechnen), also des Rechners, so alltäglich geworden, dass wir seine ursprüngliche Funktion nicht mehr wahrnehmen. Dass jede Anwendung, ob Textverarbeitung, Bildbearbeitung oder Datenbankabfrage, auf der Grundlage von mathematischen und logischen Operationen basiert, ist für die PC-Benutzer heute nicht mehr als ein fachspezifisches Hintergrundwissen, das sie selbst gar nicht benötigen.

Webtipps

<http://www.joernluetjens.de>

Die Internetseite von Prof. Dr. Jörn Lütjens enthält die beiden Online-Museen für Rechenschieber und Abakus. Dort sind zahlreiche Fotos von Sammlungsstücken, Literaturangaben und Erläuterungen zu finden.

<http://www.rechenhilfsmittel.de>

<http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Hauptseite>

Rechnerlexikon – die große Enzyklopädie des mechanischen Rechnens

Selbstvertrauen durch Rechnen

*Nicht weil es schwer ist, wagen wir es nicht,
sondern weil wir es nicht wagen, ist es schwer.*

Lucius Annaeus Seneca (römischer Philosoph)

In der Schule wurden wir lange mit Formeln und Graphen gequält. Lösungswege wurden uns an den Kopf geworfen, die wir nicht nachvollziehen konnten. Den praktischen Bezug des Rechnens zu unserem Alltag sehen wir nur in den Grundrechenarten – und die beherrschen wir. Was sollte es uns als vielbeschäftigte Erwachsene bringen, wenn wir uns mit den komplexen Themen der Mathematik beschäftigen, die keinen erkennbaren Bezug zu unserem Alltagsleben haben? Warum sollen wir uns überhaupt Gedanken darüber machen, wie es um unsere rechnerischen, mathematischen und logischen Fähigkeiten bestellt ist?

Es gibt einige Gründe, die dafür sprechen, dass wir uns auch als Erwachsene auf diese Themen einlassen. Der vielleicht wichtigste Grund ist, dass unsere mathematischen Kenntnisse die Grundlage sind, auf der unsere logischen Fähigkeiten aufbauen. Beim bewusst angewandten Rechnen im Alltag erwerben wir viele neue Erkenntnisse, und damit kommen wir sofort zu dem zweitwichtigsten, nicht zu unterschätzenden Punkt: Wenn wir neu erlernte Kenntnisse im Alltag einsetzen, dann wirkt sich das sehr positiv auf unser psychisches Wohlbefinden aus. Wir fühlen uns dadurch selbstbewusst und sicher. Wir lassen uns nicht mehr so leicht täuschen, wenn wir eine Rechnung zielstrebig in mehreren Varianten überschlagen und überprüfen können. Nicht zuletzt bedeutet mehr rechnerische Sicherheit für uns mehr Selbstvertrauen und mehr Selbstwertgefühl auch in anderen Lebensbereichen. Die Sozialwissenschaften bezeichnen die Lese- und Rechenkompetenz neben der Fähigkeit zur Problemlösung als die wichtigsten Grundkompetenzen im Erwachsenenleben eines Menschen unseres Zeitalters. Sie zu erhalten, auszubauen und weiter zu entwickeln ist ein lebenslanger Prozess. Wenn wir nicht daran arbeiten, erfahren wir über unsere Lebenszeit einen Leistungsrückgang, den wir selbst vielleicht unmittelbar spüren: dieses Gefühl, nicht

mehr mithalten zu können, Wissen, über das man früher verfügte, nicht mehr abrufen oder auch Aufgaben nicht mehr lösen zu können, über die man früher wenig nachgedacht hat. Aber auch wenn wir den Leistungsabfall nicht bei uns selbst wahrnehmen, ist es eine unangenehme Tatsache, dass unser Gehirn mit ungenutztem Wissen nicht zimperlich ist: Was nicht ständig benötigt wird, muss auch nicht schnell abrufbar sein. Wir »verlernen« und verlieren dabei nicht nur die Routine.

Wenn wir uns aktiv und interessiert mit dem Rechnen oder mit den vielen Teilgebieten der Mathematik auseinandersetzen, dann arbeiten wir an dem Erhalt und der Entwicklung dieser lebenswichtigen Kompetenz und fühlen das wachsende Vertrauen in unsere erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten, vorausgesetzt wir beginnen auf unserem persönlichen Wissensniveau und erweitern dann unsere Fähigkeiten. Die moderne Gehirnforschung hat herausgefunden, wie wichtig es für das allgemeine Wohlbefinden ist, dass das Gehirn angemessen gefordert wird. Körper und Psyche profitieren mit, wenn die Intelligenz entsprechend unseren persönlichen Voraussetzungen in Anspruch genommen wird und wir immer neue Lernerfahrungen in unserem Gehirn abspeichern. Warum sollten wir auf künstliche Gehirnjogginaufgaben ausweichen, wenn wir die Möglichkeit besitzen, unsere logischen, visuellen und rechnerischen Fähigkeiten anhand von praktischen Alltagsaufgaben zu schulen und damit zu stärken?

Wenn wir uns entschieden haben, unser rechnerisches und mathematisches Können nicht verkümmern zu lassen, dann stellt sich die Frage: Wie gehen wir am besten vor, um das zu erreichen?

Am einfachsten ist das Selbstwertgefühl da zu stützen und zu entwickeln, wo wir auf bereits erworbenem Wissen aufbauen. Wenn man bemerkt, dass man bereits Fertigkeiten besitzt, von denen man bisher vielleicht gar nichts wusste, oder dass man manches sogar richtig gut kann, das jedoch mit der Zeit einfach in Vergessenheit geraten ist – dies sind ausgezeichnete Voraussetzungen, um uns zu motivieren. Mit Ideen spielen, mit Gedanken jonglieren, sie abwandeln und in beliebige Richtungen weiterdenken, dies führt uns zu einem mitreißenden Staunen über überraschende Einsichten und Folgerungen. Auf diese Weise wird

für uns sehr deutlich, dass Mathematik eben kein abgeschlossenes Produkt darstellt und nicht nur aus einer Reihe vorgefertigter Lösungswege besteht, sondern vielmehr ein Prozess ist. Diesen Denkprozess kann man sich als eine abenteuerliche Reise vorstellen, bei der man viele gute und schlechte Erfahrungen macht. Im Mittelpunkt dieses Denkprozesses stehen immer wir selbst mit unseren individuellen Fähigkeiten und Kenntnissen. Im einführenden Kapitel wurde bereits angesprochen, dass das Lösen von schwierigen Aufgabenstellungen Auswirkungen auf unsere Frustrationstoleranz, aber auch auf unser seelisches Wohlbefinden hat. Eine schwierige Aufgabe gut gelöst zu haben macht uns selbst sicherer, optimistischer und erfreut uns eine Zeit lang. Jede Aufgabe, die wir lösen, ist ein Erfolgserlebnis und motiviert uns dazu, uns weiterzubilden und weiter mit dem Thema zu beschäftigen. Es ist nicht immer leicht, die Balance zu halten, um sich einerseits angemessen zu fordern und sich dennoch nicht dauerhaft zu überfordern. Wir benötigen kleine Erfolgserlebnisse, damit sich unser Selbstvertrauen festigt, aber wir wollen auch ab und zu die Gewissheit haben, dass wir ein schwieriges Problem gelöst, eine »harte Nuss geknackt« haben. Es dauert vielleicht eine Weile, bis wir dieses Gleichgewicht gefunden haben, aber mit der Zeit lernen wir unser Wissen, Können und unsere aktuelle Konzentrationsfähigkeit einzuschätzen. Auch beim Sport ist es so, dass der erfahrene Sportler durchaus weiß, welches Trainingspensum er sich in welcher Situation zumuten kann und muss, damit er die selbst gesteckten Ziele erreicht.

Aufgaben- oder problemorientiert zu arbeiten ist die empfehlenswerteste Art, unser Selbstwertgefühl neu aufzutanken und negative Erfahrungen hinter uns zu lassen. Mit einer positiven Einstellung gegenüber mathematischen Fragestellungen fühlen wir uns freier, entspannter und dadurch auch klüger, selbst wenn wir nicht alle Problemstellungen auf Anhieb lösen. In diesem Kapitel werden verschiedene Anlässe vorgestellt, wie wir uns in unserem Alltag mit dem Rechnen oder der Mathematik beschäftigen können und dabei unser Wissen weiterentwickeln und unser Können perfektionieren.

In diesem Kapitel werden Anregungen gegeben, wie wir beispielsweise Zahlen und Mengen besser abschätzen oder unsere Orientierungs-

fähigkeit verbessern lernen. Da die Menschen und ihre Lebenssituationen so unterschiedlich sind, ist es angebracht, dass jeder Mensch für sich selbst entscheidet, welche Interessen er stärken möchte und wie er dabei vorgeht. Wer sich mit Widerwillen und ohne Freude Ziele setzt, wird diese kaum erreichen. Es ist sehr hilfreich, wenn wir die Disziplin haben, kleine Durchhänger zu überbrücken und auch kurze Zeiten der Frustration zu überwinden, aber dennoch sollte der Spaß nicht zu kurz kommen. In der Welt der Zahlen, Muster und Strukturen findet sich für jeden ein Teilgebiet, das zu ihm passt, ihn neugierig macht und sein Interesse weckt.

Bevor wir uns jedoch mit diesen Anregungen beschäftigen, ist es hilfreich, sich mit der Verarbeitung der Mathematik in unserem Gehirn vertraut zu machen. Die moderne Gehirnforschung hat in den vergangenen Jahren viel über die Verarbeitung von Strukturen im menschlichen Gehirn herausgefunden. Aber vor allem hat sie erkannt, wie wichtig das Lernen und die intellektuelle Herausforderung für die Menschen in jedem Lebensalter sind.

Gehirnforschung und Mathematik

Wie verarbeitet unser Gehirn Mathematik? Wie geht es mit Zahlen um, wie mit räumlichen Strukturen und wie mit visuellen Eindrücken? Wir haben gesehen, wie viele unterschiedliche Gebiete es in der Mathematik gibt. Das menschliche Bewusstsein erschafft sich Symbole oder Bilder der Wirklichkeit. Um aus Erfahrungen lernen zu können, entwickelte sich die menschliche Fähigkeit, komplexe Informationen über Umwelt, Mitmenschen usw. in Symbolen und Bildern zu speichern. Diese von der Evolution hervorgebrachte Fähigkeit erleichtert es dem Menschen, Mathematik zu betreiben. Unser tägliches Leben, die Umwelt, das Wetter usw. sind ein komplexes Durcheinander verbundener Prozesse ohne Symmetrie und Eleganz. Die Menschen haben es mit ihren intellektuellen Fähigkeiten geschafft, diese Komplexität immer wieder zu ordnen.

Somit bekamen sie die Möglichkeiten, Voraussagen zu machen. Diese Voraussagen brachten Sicherheit in das Leben der Menschen und stärkten ihre Fähigkeit, Schönheit zu erleben. Die Welt ist einfach und kompliziert zugleich. Das hängt davon ab, ob man die Naturgesetze selbst oder ihre Auswirkungen betrachtet. Die menschliche Fähigkeit, Muster, Ordnungen und Symmetrien zu erkennen, ist sehr gut entwickelt. Da es für den Menschen weniger gravierend ist, wenn er Muster erkennt, die gar nicht da sind, als wenn er ein Muster übersieht, übertreiben wir diese Fähigkeiten ab und zu, wie etwa beim Aberglauben.

Um abstrakte Theorien zu veranschaulichen, hat es sich bewährt, zur Beschreibung allgemeinverständliche Bilder zu suchen. Besonders visuelle Modelle sind für das menschliche Gehirn eine gute Hilfestellung. Manchmal »hinken« diese Vergleiche allerdings und wir vergessen, dass diese Analogien nur Bilder für die Theorien sind. Ein Atom ist eben keine punktförmige Ladung und bewegt sich nicht immer auf einer Kreisbahn. Das Modell erklärt einige physikalische Eigenschaften, aber nicht alle. Im 20. Jahrhundert traten die mathematischen Modellvorstellungen anstelle der eindeutigen Theorien. Deutlich zu sehen ist dies z. B. bei der Hydrodynamik, der Lichtausbreitung oder dem Atomaufbau. Bei der Erstellung eines Modells mit Hilfe des Computers wird die physikalische Größe durch etwas anderes modelliert und analoge Aspekte des Verhaltens zwischen Wirklichkeit und Modell werden untersucht.

Da die Sprache eine Voraussetzung dafür ist, zu rechnen oder Mathematik zu betreiben, verwundert es nicht, dass unsere Muttersprache mitbestimmt, wie wir mathematische Aufgabenstellungen im Gehirn verarbeiten. Die deutsche Sprache macht es den Kindern nicht leicht, da ihre Zahlwörter oft nicht der logischen Zahlenstruktur entsprechen. Der Verein zwanzig-eins setzt sich z. B. dafür ein, dass in der Schule auf eine logische Sprechweise der Zahlen umgestiegen wird. Der Vergleich von kulturellen Unterschieden beim Verarbeiten von Rechenaufgaben führt Wissenschaftler zu interessanten Ergebnissen. Gut eignen sich direkte Vergleiche mit Muttersprachlern aus dem asiatischen Sprachraum, die mit Schriftzeichen schreiben, und englischen Muttersprachlern, die mit einem Alphabet aufwachsen. Bei Additionsaufgaben ist bei den eng-

lischsprachigen Versuchspersonen die Sprachregion im Gehirn aktiv, bei den asiatischen dagegen die Hirnregion, die die visuellen Informationen verarbeitet. Die Unterschiede bei der Verarbeitung der mathematischen Aufgabenstellungen erklären sich die Wissenschaftler vor allem damit, dass das Erlernen der asiatischen Schriftzeichen die Fähigkeit der räumlichen, visuellen Gehirntätigkeit fördert. Beispielsweise die Verwendung des Abakus unterstützt ebenfalls diese Form der Verarbeitung.

Die Entwicklung des menschlichen Gehirns ist unmittelbar mit der Fähigkeit verknüpft, Muster, Figuren und Symmetrien zu erkennen. Auch wenn es kulturelle Unterschiede beim Verarbeiten der Informationen gibt, ist allen Menschen gemeinsam, dass sie ein Bedürfnis und eine Veranlassung haben, sich mit diesen Mustern zu beschäftigen und daraus Regeln und Formeln zu entwickeln oder auch Kunstwerke zu schaffen. Dieses natürliche Bedürfnis ist so stark ausgeprägt, dass das Gehirn auch da Muster sucht, wo nur der Zufall einwirkt. Wir kennen das, wenn Kinder in den Wolken Märchenfiguren ausmachen oder wenn wir in Gesteinsformationen Gestalten wahrnehmen. Das menschliche Gehirn ist immer auf der Suche nach bekannten Mustern.

Was die Menschen von allen anderen Lebewesen unterscheidet, ist ihre Fähigkeit des lebenslangen Lernens. Das menschliche Gehirn ist so angelegt, immer beschäftigt und gefordert zu werden – aber nicht nur das Gehirn. Auch unsere Seele und unser Körper reagieren auf Forderung oder Unterforderung des Gehirns. Für ein gesundes und ausgeglichenes Leben ist es notwendig, dass wir angemessen beansprucht werden. Unser Gehirn zu schulen, es zu trainieren und zu entwickeln ist eine Lebensaufgabe, der wir manchmal weniger Zeit widmen als sportlicher Betätigung. Wir müssen denken und wollen denken. Ständige geistige Unterforderung macht uns nervös und intolerant. Die individuelle Beschäftigung mit mathematischen Themen ist eine gute Möglichkeit, unser Gehirn zu trainieren und damit gleichzeitig für ein ausgeglichenes Wohlbefinden zu sorgen. Die Gehirnforschung hat heute längst erkannt, dass das menschliche Gehirn den Körper mit der Ausschüttung von »Glückshormonen« belohnt, wenn er sich intensiv mit einem Problem beschäftigt hat und nach langem Nachdenken und Probieren die Lösung

findet. Und das gilt nicht nur für das Lösen von Sudokus. Dass viele Menschen durchaus Interesse haben, ihr Gehirn zu fordern, sieht man an dem Verkaufserfolg vieler Bücher zum Thema Gedächtnistraining. Aber warum sollten wir Menschen nur einen kleinen Teil unseres Gehirns pflegen, wenn wir doch alle Möglichkeiten in unserem Alltag besitzen, um uns in einem anregenden lebenslangen Bildungs- und Lernprozess fit zu halten? Es bereitet auf Dauer viel mehr Spaß und Freude, sich lebendiges Wissen anzueignen, als eintönige Zahlenreihen auswendig zu lernen oder Kreuzworträtsel zu lösen.

Freude und Spaß am Lösen von Rätseln

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.

Blaise Pascal

Das Spielerische und Unterhaltsame in der Mathematik übt auf viele Menschen eine große Anziehungskraft aus und entfacht ihre Begeisterung und Leidenschaft. Wie wir aus Mythen, Märchen und Geschichtsschreibung wissen, haben mathematische Rätsel und Spiele die Menschheit über Generationen und Kulturen hinweg fasziniert. Die Unterhaltungsmathematik ist derjenige Zweig der Mathematik, der fast ausschließlich zum Zeitvertreib, zum Zweck der intellektuellen Unterhaltung betrieben wird. Bei ihr werden vorhandene mathematische Methoden auf ungewöhnliche Fragestellungen angewendet. Meist geht es darum, kreative und verblüffende Anwendungen zu finden, die Neugierde und Erstaunen hervorrufen.

Denksportaufgaben und humorvoll umschriebene Aufgabenstellungen üben eine ungeheure Faszination aus und wirken durch die Konzentration auf das abstrakte Problem manchmal fast meditativ. Nicht erst seitdem das Zahlenrätsel Sudoku in Mode gekommen ist, kennen Insider die fast süchtig machende Wirkung dieser Rätsel und Spiele. In den 80er

Jahren des vergangenen Jahrhunderts war es der Zauberwürfel, ein greifbares mathematisches Rätsel, der jung und alt verband. Nach seinem Erfinder auch Rubikwürfel genannt, war er ein mechanischer Würfel, dessen Seiten aus jeweils drei mal drei großen Flächen bestanden, die so wiedereingestellt werden sollten, dass der Würfel jeweils aus gleichfarbigen Flächen zusammengestellt war. Wahrscheinlich hat er so einige Beziehungskrisen ausgelöst, weil der nicht vom Rätselfieber infizierte Partner die intensive Beziehung zu einem Plastikgegenstand nicht nachvollziehen konnte.

Eine ähnlich faszinierende Wirkung haben die Sudoku-Rätsel. Bei den Sudoku werden in ein Schema aus neun mal neun Kästchen die Ziffern 1 bis 9 so eingetragen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Ziffer genau einmal vorkommt. Zudem sind die 81 Kästchen in neun quadratische Blöcke aufgeteilt. Auch in diesen Blöcken soll jede Ziffer genau einmal stehen. Zu Beginn sind bereits einige Zahlen in das Gitter eingetragen. Sudoku sind ein Beispiel für angewandte Logik, die wir im normalen Leben fast nie einsetzen. Sie befriedigen aber ein urmenschliches Grundbedürfnis, nämlich durch Nachdenken Ordnung ins Chaos zu bringen. Der Ursprung der Sudokus liegt weit zurück: Bereits im abergläubischen Mittelalter erfreuten sich die magischen Quadrate großer Beliebtheit.

Rätsel sind eine gute Möglichkeit zu überprüfen, ob wir die Zusammenhänge der Theorie verstanden haben. Mit dem Zauberwürfel beispielsweise überprüfen und vergleichen Mathematiker ihre Algorithmen und Methoden zu Problemstellungen, die sich mit der Suche und Aufzählung von Positionen beschäftigen. Immerhin sind von jeder beliebigen Ausgangsstellung des Würfels 43 Trillionen (eine Zahl mit 18 Nullen) verschiedene Stellungen zu erreichen, und dennoch bedarf es von jeder verschiedenen Ausgangsstellung höchstens 26 Züge, um den Würfel in die perfekte Endstellung zu bewegen.

Auf unterhaltsame Art üben und trainieren wir unsere mathematischen und rechnerischen Fähigkeiten fast nebenbei. Wie auf fast allen Gebieten gibt es auch bei den Rätseln Vorlieben. Ob visuelle Aufgaben, Aufgaben aus der Zahlentheorie oder logische Aufgaben: wer Spaß am Rätseln hat, kann sich die geeigneten Rätselarten aussuchen und sich in

immer schwierigeren Denksportaufgaben üben. Es gibt unzählige Literatur zu den einzelnen Themen und auch Wochen- oder Tageszeitungen veröffentlichen mathematische Aufgaben. Es lohnt sich, dabei zu verweilen.

Ein schönes Beispiel aus der Unterhaltungsmathematik ist die Zauber-
kugel. Die mathematische Zauber-
kugel kann Gedanken lesen, sie schafft
es, immer das Ergebnis der Zahl anzuzeigen, an die man gedacht hat. Im
Internet kann man diese Zauber-
kugel finden und sich den Kopf darüber
zerbrechen, wie sie funktioniert.

Generell gibt es neben den klassischen Rätseln eine große Auswahl
an weiterer mathematischer Unterhaltung. Dazu gehören die Zahlen- und
Schreibspiele ebenso wie die Aufgaben, die am Computer dargestellt
werden. Für die Praktikerinnen und Praktiker gibt es schöne Basteleien
mit Papier- und Faltpuzzles, Puzzles aus Holz mit magischen Würfeln.
Wem es früher Spaß gemacht hat, Papierschiffchen zu falten, dem gefällt
es vielleicht heute, seine Mitmenschen mit einem Tetraflexagon zu über-
raschen. Ein Tetraflexagon ist ein 2×2 -Quadrat, das man aus einem Strei-
fen Papier faltet. Das Besondere ist, dass man das Flexagon auf der Rück-
seite wie ein Buch öffnen kann. Dann erscheint ein weiteres 2×2 -Quadrat,
das vorher verborgen war. Die Anleitung dafür findet sich auf der in
den Hinweisen genannten Internetseite der mathematischen Basteleien.
Das Flechten der fünf platonischen Körper, archimedischen Körper oder
Rhomgenpolyeder kann man auf der Homepage von Manuel Erdin lernen,
dessen Internetadresse ebenfalls in den Hinweisen zu finden ist.

Geheimnisvolle Labyrinth, begehbar oder als Abbildungen, haben
die unterschiedlichsten Kulturen fasziniert und werden oft mystisch
gedeutet. Auch für uns ist es heutzutage immer noch spannend, in
einem Labyrinth den Weg nach draußen zu suchen. Historisch betrachtet
gehören auch die Brettspiele wie Dame, Mühle, Schach oder das chinesi-
sche Go-Spiel zu den mathematisch-logischen Unterhaltungsspielen. Die
Palette ist breit gefächert und bietet für alle Vorlieben und Geschmäcker
das Passende, wenn wir unsere Augen öffnen.

Infobox – Unterhaltungsmathematik

Webtipps

<http://www.der-kleine-gedankenleser.de>

Hier findet sich die Zauber-
kugel. Wie liest sie deine Gedanken?

<http://www.mathewitze.de>

Unterhaltsame Internetseite mit mathematischen Gedichten, Zitaten,
Anekdoten, Witzen, Comics und Kno-
beleien

<http://www.mathematische-basteleien.de>

Anleitungen für Faltfiguren aus Papier, Puzzles, Schreib- und Zahlenspiele
und magische Würfel

<http://go.to./Erdin>

Manuel Erdin stellt auf seiner Seite Anleitungen zum Flechten von plato-
nischen und archimedischen Körpern zur Verfügung

Literatur

Unzählige Bücher zur Unterhaltungsmathematik gibt es von dem Autor
Martin Gardner, viele Jahre lang Autor der Kolumne *Mathematical Games*
im *Scientific American*

Sicherheit durch Können

*Wenn man etwas nicht weiß, so kann man fragen;
wenn man etwas nicht kann, so kann man es lernen.*

Lü Bu We

Für die Mathematik und das Rechnen gilt eines genauso, wie wir es
bei anderen Themen oder Aufgaben kennen. Am leichtesten lernen wir
durch Beispiele, Anwendungen und den praktischen Bezug zu unserem
Leben. Wir können viele Dinge sehr viel einfacher behalten, wenn wir
sie an einem anschaulichen Problem erarbeitet haben. Für das Rechnen

insbesondere gilt, dass wir immer sicherer werden, je häufiger wir es aktiv einsetzen. Daher soll in diesem Abschnitt auf ein paar Aspekte des Rechnens eingegangen werden. Sie sind zur Motivation, als Anregung und kurze Inspiration gedacht, sich mit dem Thema aktiv auseinander zu setzen. Es bleibt der Leserin oder dem Leser selbst überlassen, sich nach seinen persönlichen Fähigkeiten, Interessen oder Lebensumständen auf die eine oder andere Art im Alltag damit zu beschäftigen oder sich eigene spezielle Gebiete herauszunehmen, für die sie oder er sich besonders interessiert. Es ist als eine Sammlung von Anregungen zu sehen, die als Anstoß dienen sollen, sich mit der Thematik zu beschäftigen, wobei der Spaß und die Freude im Vordergrund stehen.

Kopfrechnen

Es gibt sehr unterschiedliche Meinungen zum Thema Kopfrechnen, also das Rechnen ohne Hilfsmittel. Für die meisten Menschen ist das Kopfrechnen überflüssig geworden, weil sie der Ansicht sind, ein Taschenrechner erfülle diese Funktion sehr viel besser als wir es können. Außerdem ist das Kopfrechnen für viele der stumpfe, stupide Teil des Rechnens: eine mechanische Anwendung von Rechenregeln, keine wirkliche geistige oder logische Intelligenzleistung. Das Kopfrechnen wird oft abschätzig betrachtet, es lässt sich jedoch auch aus einer anderen Sicht sehen.

Früher waren wir stolz und fühlten uns klug, wenn wir gut kopfrechnen konnten: das kleine Einmaleins, das große Einmaleins, Addieren und Subtrahieren. Heute ist das Kopfrechnen aus unserem Erfahrungsbereich gerückt. Manchmal beschleicht uns ein ungutes Gefühl, wenn wir für eine einfache Aufgabe den Taschenrechner verwenden: »Früher habe ich das im Kopf gerechnet.« Was spricht für das Kopfrechnen? Etwa die Sicherheit, ohne Hilfsmittel zu einem Ergebnis zu kommen. Und die gleichzeitig durchgeführte Plausibilitätsprüfung, d. h. die Überlegung, ob das Ergebnis stimmig oder logisch ist, der befreiende Umgang mit den Zahlen und ein Gefühl der Überlegenheit. Uns kann so schnell niemand in die Tasche stecken. Wir rechnen uns schon selbst etwas vor. Wenn wir unsere Zeit nicht mit dem Rechnen verschwenden müssen, weil es automatisiert abläuft, haben wir viel mehr Zeit und Energie für die Überlegun-

gen, die zum Verständnis notwendig sind. Ein weiterer großer Vorteil ist das instinktive Aufspüren eines Fehlers. Das Kopfrechnen beginnt mit dem kleinen Einmaleins und ist wie das Jonglieren mit Zahlen statt mit Bällen – oder auf den Fußball bezogen ist es das »Ballgefühl«, die Zahlen fallen auf den Fuß: 7–14–21–28... Es wiederholt sich, aber der Ball fällt herunter, wenn die Zahl nicht stimmt. Um den entscheidenden Treffer zu erzielen, kann es hilfreich sein, die Zahlenreihe 21–28–35–42 immer weiter zählen zu können. Unser Gefühl hilft uns dann, wir schrecken auf, wenn wir merken, dass die Zahlen nicht stimmig sind. Die beste Art, sich das kleine Einmaleins anzutrainieren, ist das Einprägen der Lautfolge. Da unser Gehirn sehr assoziativ arbeitet, ist es eine schwierige Angelegenheit, Anhaltspunkte für eine so gleichmäßige Aufgabe zu finden. Die Lautfolgen unterstützen dabei den Lernprozess.

Das große Einmaleins ist schon etwas sperriger und unzugänglicher. Aber es ist ein riesengroßer Schritt in Richtung Zahlengefühl. Wir beginnen damit, uns das Fundament für unser Selbstvertrauen neu zu erarbeiten, wenn wir mit dem großen Einmaleins jonglieren können. Um mehrstellige Zahlen zu berechnen, gibt es einige Hilfsüberlegungen. Einige davon basieren auf den Binomischen Formeln und bedürfen der Kenntnis von Quadratzahlen, wieder andere beziehen sich auf die Berechnung bestimmter Zahlengruppen. Bei Wikipedia lässt sich dazu einiges nachlesen.

Je ausgereifter unser Zahlengefühl ist, desto besser können wir uns dann bei abstrakten Gedankengängen konzentrieren, die zur Lösung unseres Problems führen. Unser Denken wird dadurch ökonomischer und schneller.

Was heißt Multiplikation? Sind wir uns immer sicher, was es wirklich heißt? $5+5+5+5$ erkennen wir im Alltag sofort, wo liegt die Addition in der Multiplikation verborgen? Machen wir uns auf und spielen mit den Zahlen, die uns etwas angehen. Die beste Möglichkeit mit den Zahlen umzugehen ist, sie wahrzunehmen. Nehmen wir sie auf und rechnen wir uns unsere Lebensbedingungen aus. Nehmen wir Bezug auf unser wirtschaftliches und soziales Leben und wandeln wir die sich daraus ergebenden Zahlen um in Prozente, in Summen, in Subtraktionen: lernen wir mit unserem eigenen Leben zu rechnen. Je mehr wir über die Zahlen

wissen, desto sicherer sind wir im Umgang mit ihnen: gerade Zahlen, ungerade Zahlen, Dezimalzahlen und Bruchrechnungen.

Zum Ende dieses Kapitels sei erwähnt, dass das antrainierte, schnelle Kopfrechnen oder schriftliche Rechnen auch Gefahren birgt. Wenn wir zu früh automatisierte Rechenverfahren einsetzen, achten wir vielleicht nicht mehr so sehr auf die gesamte Fragestellung, oder wir bemühen uns weniger, die logischen Zusammenhänge zu verstehen. Den Blick auf die Gesamtfragestellung sollten wir also nie verlieren. Auch das können wir uns antrainieren.

Infobox – Kopfrechnen

Webtipps

<http://learning.jgutzeit.de/tips/math.html>

Tipps und Tricks zum Kopfrechnen

Schriftliches Rechnen und Prozentrechnung

Im vorherigen Kapitel wurde deutlich, dass die Meinungen zum Thema Kopfrechnen auseinander gehen. Wer keinen Bezug zum Kopfrechnen findet, der kann durchaus auf die einfachsten Hilfsmittel Stift und Papier zurückgreifen. Wichtig ist, dass wir den Weg wählen, der unseren Bedürfnissen am meisten entspricht und dass wir dabei eine gewisse Fertigkeit oder Routine bekommen. Wenn wir uns angewöhnen, im Alltag auftretende Berechnungen zu überprüfen, dann werden wir sehr schnell ein rechnerisches Gespür bekommen und nehmen offensichtliche Fehlerquellen viel schneller wahr. Eine weitere Möglichkeit ist, sich eine Mischung aus schriftlichem Rechnen und Kopfrechnen anzugewöhnen. Manche Menschen wollen die Zwischenrechnung notieren, ehe sie den nächsten Rechenschritt vollziehen. Vielleicht ist der Gedanke neu für uns, dass wir uns nicht an den in der Schule gelernten Techniken orientieren müssen. Wir können uns die Methoden heraussuchen, die unseren Bedürfnissen

und Fähigkeiten am nächsten kommen, die uns am meisten Spaß und Freude bereiten. Wichtig ist dabei nur, dass wir uns immer wieder eine neue Frage oder Aufgabe stellen und versuchen, sie mit eigenen Mitteln und Möglichkeiten zu beantworten.

Der Dreisatz als Alleskönner

Neben dem schriftlichen Berechnen der Grundrechenarten und der Prozentrechnung kommt dem Dreisatz im Alltag die größte Bedeutung zu. Wir treffen täglich kleine und große Entscheidungen, die wir mit dem Dreisatz gut und sicher lösen können. So etwa beim Einkaufen, wenn wir den Preis von verschiedenen Packungsgrößen herausfinden wollen, beim Kochen, wenn wir ein Rezept auf eine geeignete Portionsgröße umrechnen wollen oder beim Renovieren, wenn wir unseren Materialeinsatz bestimmen, um nur einige Beispiele zu nennen.

Der allgegenwärtige Dreisatz. Salopp ausgedrückt, lässt sich sagen: »Wer ihn beherrscht, ist im Vorteil.« Sehr viele Rechnungsansätze lassen sich auf den Dreisatz zurückführen, und mit etwas Geduld, Papier und Stift haben wir ihn uns ratzfatzt hergeleitet. Zinsrechnungen, Lösungsrechnungen aus dem chemischen Bereich, Verdünnungsrechnungen und Relationen können wir mit dem Dreisatz lösen. Der Dreisatz ist der Alleskönner der Lösungsansätze – das Schweizer Taschenmesser sozusagen. Dennoch gibt es so viele Menschen, die einerseits von sich sagen, sie hätten den Dreisatz nie verstanden, die aber intuitiv doch zu einem Ergebnis gelangen und sich nicht im Klaren darüber sind, dass sie ihr Ergebnis gerade mit einem Dreisatz ausgerechnet haben. Woran liegt es, dass der Dreisatz so schwierig erscheint?

Bevor wir den Ansatz für den Dreisatz aufstellen, entscheiden wir, ob es sich um einen proportionalen oder einen umgekehrt proportionalen Ansatz handelt. Eine Hilfestellung dabei ist es, wenn wir die mathematische Fragestellung in Sätze fassen:

Wenn ich 200 g Mehl für ein Rezept für 4 Personen brauche, wie viel benötige ich für 6 Personen?

Der Ansatz ist *proportional*, denn je *mehr* Personen es sind, für die ich mein Rezept zubereiten möchte, desto *mehr* Mehl benötige ich.

Zwei Freundinnen möchten zusammen ein Ferienhaus mieten, jede zahlt 300 Euro, wie viel zahlen sie, wenn eine dritte Freundin mitfahren will?

Jetzt ist der Ansatz *umgekehrt proportional*, denn je *mehr* Personen mitfahren, desto *weniger* kostet das Ferienhaus für jede einzelne Person.

Die Entscheidung, ob es sich um einen proportionalen oder einen umgekehrt proportionalen Ansatz handelt, ist die wichtigste Basis für unseren Ansatz. Es gibt auch Beispiele, bei denen die Ansätze zusammengesetzt sind. Aber die Grundsätze sind immer analog.

Jetzt werden die zueinander passenden Größen in Relation zueinander gesetzt. Beim proportionalen Ansatz heißt das:

Ich benötige 200 g Mehl für 4 Personen.

Ich benötige 200 g geteilt durch 4 für 1 Person, also 50 g.

Ich benötige 50 g mal 6 für 6 Personen, also 300 g.

Beim *umgekehrt proportionalen* Ansatz heißt es:

Die beiden Freundinnen zahlen jeweils 300 Euro, also 600 Euro zusammen.

Die drei Freundinnen können die Miete durch 3 teilen und zahlen daher jeweils 200 Euro.

Der Dreisatz ist eine mathematische Technik, die bei den unterschiedlichsten Ansätzen angewendet werden kann. Sich diese Technik in den beiden Grundvarianten einzueignen bringt Sicherheit auch bei komplexen Aufgaben, denn viele komplizierte Ansätze lassen sich in übersichtliche und nachvollziehbare Teilschritte aufteilen, die den oben beschriebenen Schritten ähneln. Also nicht erschrecken lassen, sondern einfach in Ruhe überlegen, wie die Teilschritte aussehen und dann loslegen!

Der »gesunde Menschenverstand« – Einschätzen von Größenordnungen

Bei vielen Rechnungen ist es eine große Hilfe, wenn wir uns erst einmal eine Vorstellung über die Größenordnung der Lösung machen. Das hat zum einen den Vorteil, dass wir die Lösung auch selbst bewerten können – wenn sich etwa ein Kommafehler eingeschlichen hat, merken wir das sehr schnell. Andererseits gibt es sehr viele Rechnungen, bei denen uns ein Näherungswert durchaus als Lösung genügt. Wir müssen nicht bei jeder Rechnung die Lösung auf mehrere Stellen hinter dem Komma kennen.

Durch häufiges Üben der Abschätzung von Lösungen werden die Konzentrationsfähigkeit und das logische Denken trainiert.

Der sogenannte »gesunde Menschenverstand« kann uns in der Praxis in große Schwierigkeiten stürzen. Dafür gibt es verschiedene Gründe. Die Fähigkeit des Menschen, sehr große oder sehr kleine Zahlen und die jeweiligen Abstände zu schätzen, ist nicht sehr gut entwickelt. Da wir viel Erfahrung im Schätzen mittlerer Größenordnungen haben, sind wir in diesem Bereich sehr selbstsicher und übertragen diese Sicherheit auch auf die sehr großen und sehr kleinen Zahlen; dabei unterschätzen wir häufig unsere Fehlerquote. Die mangelhafte Selbsteinschätzung führt fatalerweise dazu, dass wir uns dieser Schwäche nicht bewusst sind.

Eine häufige Fehleinschätzung ganz anderer Art ist, dass uns ein häufig auftretendes Übersetzungsproblem nur wenig ins Auge fällt: Die Milliarde, im deutschen Sprachraum eine Zahl mit neun Nullen, wird im englischen und französischen Sprachraum »Billion« genannt – im Deutschen ist die Billion allerdings eine Zahl mit 12 Nullen. Obwohl sich deswegen viele Übersetzungsfehler in politische und wissenschaftliche Texte und Nachrichten einschleichen, fällt das nur wenigen Menschen auf.

Eine weitere Quelle für Missverständnisse ist die menschliche Schwäche, für viele Vorgänge in der Natur oder der Umwelt ein lineares Verhalten vorauszusetzen. Eine lineare Vorstellung bedeutet z. B., dass wir uns dem Trugschluss hingeben, doppelt so viel Kohlendioxidausstoß würde auch doppelt so viel Schaden anrichten. In der Praxis kann es sein, dass ein Kohlendioxidausstoß, der sich nur um ein paar Prozentpunkte

erhöht, den Klimaschaden verdoppeln kann. Der Mensch ist es gewohnt, sich gedanklich in linearen Vorstellungen zu bewegen. Fatalerweise laufen viele Prozesse in der Natur jedoch exponentiell ab, wie etwa fast alle Wachstumsprozesse. Somit sind sehr viele kritische Situationen davon betroffen. Im ersten Teil der Steigung ähnelt die Exponentialfunktion dem linearen Verhältnis. Wir gewöhnen uns an diesen Prozess und sind dann überrascht, wenn uns die »Lawine überrollt«. Es gibt die beeindruckende Geschichte über das Schachbrett und die Reiskörner, die diesen exponentiellen Anstieg sehr bildhaft beschreibt.

Ein König wollte den Erfinder des Schachspiels belohnen und fragte ihn, was er sich wünsche. Dieser sagte, er wünsche sich für das erste Feld auf dem Schachbrett ein Reiskorn, für das zweite Feld zwei, für das dritte Feld vier – also immer die doppelte Anzahl von Reiskörnern. Der König war zunächst erstaunt über die Bescheidenheit dieses Wunsches, bis ihn seine Berater darauf aufmerksam machten, dass für die Erfüllung dieses Wunsches die gesamte Reisernte der Welt nicht ausreichen würde.

Sich über die Auswirkungen dieser Prozesse bewusst zu werden, indem man sich mit Zahlen und Größenordnungen konfrontiert, bringt interessante Erkenntnisse. Gut darstellen lassen sich die Zahlen solcher Prozesse, wenn man sie am PC in einer Tabelle notiert und sie in unterschiedlicher Weise als Infografik ausgeben lässt. Dann erkennen wir die Zusammenhänge der Zahlen und ihrer Verhältnisse, die sich durch ihre Veränderungen ergeben, schneller und besser.

Selbst so etwas Langweiliges wie der Staatshaushalt lässt sich in interessante Bereiche gliedern, wenn wir die nüchternen Zahlen in verschiedene anschauliche Portionen umrechnen und uns im wahrsten Sinne des Wortes »ein Bild davon machen.«

Physikalisches Rechnen im Alltag

Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben.

Galileo Galilei

Physikalisches Rechnen hat den Vorteil, dass der Bezug zur Aufgabenstellung nicht abstrakt, sondern sehr konkret und praxisorientiert ist. Die Physik, auf die wir in unserem Alltag stoßen, lässt sich meistens mit den Mitteln der Schulphysik und Schulmathematik berechnen. Hier gilt es zunächst, einfach die Augen zu öffnen und sie zu erkennen, sobald sie uns begegnet. Denn es gibt sehr viele Möglichkeiten, physikalisches Rechnen im Alltag anzuwenden. Es beginnt vielleicht beim Einkauf mit dem Umrechnen verschiedener Packungsgrößen oder dem Vergleichen physikalischer Daten, geht weiter mit der Ernährung oder mit Energieberechnungen im Haushalt, und auch unsere Hobbys können uns Anlass für physikalisches Rechnen geben. Im Sport können Geschwindigkeiten, Krafteinwirkungen, Umdrehungen o.ä. berechnet werden. Bei Handarbeiten und Renovierungen können Materialeinsatz und Zeitkontingente, bei Finanzangelegenheiten ausführliche Zinsberechnungen durchgeführt werden.

Umrechnungen von Einheiten sind eine gute Möglichkeit, unser Empfinden für Zahlen und Größenordnungen zu stärken. Dazu eignet sich das Umrechnen von Temperaturen in die verschiedenen Temperaturskalen ebenso, wie Volumeneinheiten oder amerikanische bzw. englische Maßeinheiten in deutsche Werte umzurechnen.

Ein Gebiet, in dem wir sehr viel praktischen Wert erzielen, ist der Energieverbrauch. Wenn wir versuchen, unseren Energieverbrauch nach ökologischen Gesichtspunkten zu optimieren, dann ergeben sich daraus sehr viele Anlässe, bei denen wir physikalisches Rechnen im Alltag üben und anwenden können: beispielsweise die Energieabrechnung zu überprüfen und die Frage zu beantworten, wie viel Energie der Kühlschrank, der Computer oder die Spülmaschine verbrauchen und wie teuer diese Energie ist. Somit können wir überdenken, wie wir durch die Veränderung

unseres Verhaltens Energie einsparen können. Aber auch die verschiedenen Abgaswerte bei unterschiedlicher Fahrweise sind eine Errechnung wert. Das Autofahren und der Straßenverkehr bieten die Möglichkeit, sich immer wieder mit den Aspekten der Verkehrssicherheit und damit der Mechanik auseinander zu setzen.

Sich mit physikalischem Rechnen über Größenordnungen bewusst zu werden ist ein guter Trick, sich anschauliche Merkhilfen bereitzustellen. Wir alle kennen die veranschaulichende Wirkung, die Bilder auf uns erzielen.

Statistik – die unterschätzte Macht

Wir sind umgeben von Informationen, die in Form von Statistiken vorliegen. In der Alltagswelt kommen wir meistens mit der beschreibenden Statistik in Kontakt, bei der Daten in geeigneter Weise etwa als Tabellen oder Diagramme zusammengefasst und dargestellt werden. Ein weiterer Teilbereich der Statistik ist die mathematische Statistik, manchmal auch schließende Statistik genannt. Grundlage für die mathematischen Schätz- und Testverfahren liefert die bereits angesprochene Wahrscheinlichkeitstheorie. Bei diesen Verfahren geht es fast darum, mathematisch zu beweisen, dass ein Unterschied oder ein Zusammenhang signifikant ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass sie durch Zufall zustande gekommen sind, muss gering sein.

Fast alle naturwissenschaftlichen oder soziologischen Messverfahren basieren auf Statistiken. Medizinische Studien werden mit statistischen Verfahren ausgewertet; neue Theorien in vielen wissenschaftlichen Bereichen wurden aufgrund von statistischen Beobachtungen und Auswertungen aufgestellt. Wir sehen daran, dass die Statistik ein vielfältiges Werkzeug ist, das durchaus qualifiziert eingesetzt werden kann, wenn wir auf die Fakten achten.

Zeitgenössische Mathematik

Um 1900 waren die Mathematiker überzeugt, dass es ihnen in naher Zukunft gelänge, ein perfektes, vollständiges Gebäude der Mathematik zu errichten. In seinem historischen Vortrag im Jahr 1900 formulierte der deutsche Mathematiker David Hilbert (1862–1943) mehrere Probleme, die er als die größten »Wissenslücken« empfand. Diese offenen Fragen galt es zu erforschen, um dem Ziel einer streng logisch aufgebauten und lückenlosen Mathematik näher zu kommen. Aber leider erwies sich dieser Gedanke als unerfüllbarer Traum. Denn Anfang des 20. Jahrhunderts kam es überraschend zu einer tiefen Krise in der Mathematik. Der österreichische Mathematiker und Logiker Kurt Gödel (1906–1978) zeigte mit seinem Unvollständigkeitssatz, dass nicht jeder wahre Satz bewiesen werden kann. Genau das wäre jedoch Voraussetzung gewesen, um die noch bestehenden Lücken in den verschiedenen Feldern der Mathematik zu schließen. Nur ein widersprüchlicher Satz, und das ganze Gebäude der Mathematik drohte zusammenzustürzen. Das war eine grundlegend neue und anfangs irritierende Sicht auf die Mathematik.

Dennoch etablierte sich die Mathematik zeitgleich – also seit Anfang des letzten Jahrhunderts – als eine moderne Hochtechnologie. Seit 1900 wurden in der Mathematik mehr Entdeckungen gemacht als in der gesamten mathematischen Geschichte zuvor.

Die Mathematik schwingt sich also einerseits bis in abstrakte Höhen, andererseits verbindet sie die verschiedenen Wissenschaften, indem sie wichtige Brücken zwischen ihnen baut. Wie schwierig sich die abstrakten Höhen in einigen fernen Sphären der Mathematik gestalten, die nur einer Hand voll Spezialisten zugänglich sind, wurde in diesem Buch schon an der Problematik der Beweisüberprüfung gezeigt. Nur wenige Menschen verstehen überhaupt die Fragestellung, um die es geht. Noch kleiner ist die Gruppe jener Denker, die eine der möglichen Antworten kennt; somit tragen diejenigen, die sich ein Urteil darüber bilden können, eine große Verantwortung.

Dennoch hat die zeitgenössische Mathematik eine große Breitenwirkung, weil sie eine wichtige Aufgabe bei der Wissenschaftskommuni-

kation, also der Vermittlung von Wissen zwischen den Forschungsbereichen, übernimmt. Das gelingt, weil die mathematischen Ansätze aus den verschiedensten Bereichen der Forschung übertragbar sind. Es gibt kaum eine Wissenschaft, die ohne komplexe mathematische Modelle auskommt. Dies beginnt mit der Thermodynamik und reicht über die Molekularbiologie bis hin zu den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften: Überall haben sich spezielle mathematische Methoden in den einzelnen Wissenschaftsbereichen durchgesetzt. Für Online-Spiele und Filme mit aufregenden Spezialeffekten werden raffinierte mathematische Theorien benötigt, um realistische Szenarien darzustellen und wiederzugeben. Bei der Modellerstellung und ihrer Auswertung kommen sehr unterschiedliche mathematische Anwendungen zum Einsatz. Das können z. B. statistische Methoden, Anwendungen aus der Graphentheorie oder der Wahrscheinlichkeitstheorie sein. Alle computerbasierten Modelle müssen unter dem Gesichtspunkt der numerischen Mathematik optimiert werden, damit sie effektiv programmiert werden können. Die Mathematik ist sowohl für die Naturwissenschaften als auch für viele Bereiche der Geisteswissenschaften unentbehrlich geworden.

Mathematische Modelle

Was ist ein mathematisches Modell und was kann sich ein Laie darunter vorstellen? Meistens ist ein Modell eine greifbare Darstellung. Ein Architekt erstellt ein Modell nach seinen Plänen, ehe er ein geplantes und gezeichnetes Gebäude bauen lässt. Ein physikalisches Modell gibt uns oft eine visuelle Vorstellung einer Theorie, wie etwa die verschiedenen Atommodelle. Und auch ein mathematisches Modell bildet die Wirklichkeit ab. Eine reale Situation wird zur Bearbeitung in mathematischen Formeln beschrieben. Es besteht aus Gleichungen oder Gleichungssystemen, in die Parameter eingearbeitet werden, die die Prozesse beeinflussen oder steuern. Die Parameter sind in der Physik Kenngrößen, in der

mathematischen Modellgleichung sind sie Formvariablen, d. h. es sind Variablen, die »festgehalten« werden.

Differentialgleichungen eignen sich besonders gut zur Modellierung von Anwendungsproblemen, da sich viele biologische und physikalische Prozesse damit mathematisch beschreiben lassen. Die Lösung der Differentialgleichung gibt an, wie sich beispielsweise ein physikalischer Prozess von einem bestimmten Anfangszustand aus entwickelt. Es gibt nur für wenige Differentialgleichungen exakte analytische Lösungen, daher werden sie meistens numerisch, also mit Hilfe eines Näherungsverfahrens – eines Algorithmus – mit dem Computer berechnet. Ein Algorithmus ist eine definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines bestimmten Problems in endlich vielen Schritten. Oder anders ausgedrückt: er zerlegt eine Berechnung in bestimmte Abfolgen von elementaren Rechenschritten. Der Algorithmus wird zunächst theoretisch erstellt, d. h. als mathematische Aufgabe formuliert, und dann wird er programmiert.

Ganz kurz und vereinfacht zusammengefasst, geschieht bei der mathematischen Modellbildung also folgendes: Ausgehend von einer praktischen Problemstellung fassen wir alles, was wir über das Problem wissen und von dem wir annehmen, dass es etwas mit dem Problem zu tun hat, in Gleichungen und berechnen das Ergebnis mit einem programmierten Algorithmus. Ganz entfernt können wir das Verfahren damit vergleichen, wie wir früher in der Schule Textaufgaben gelöst haben: Zu einer Problemstellung wird die Gleichung gefunden, passend umgestellt und danach das Ergebnis mit dem Taschenrechner berechnet. Allerdings kennt bei diesen Aufgaben immer jemand die richtige Lösung, während bei der mathematischen Modellierung in der Forschung die Richtigkeit des aufgestellten Modells zusammen mit ihrer Auswertung überprüft werden muss. Nur mit einem auf Richtigkeit überprüften Modell kommen die Wissenschaftler zu guten Ergebnissen. Diese Überprüfung geschieht, indem die Lösungen der Modellgleichungen für bestimmte Parametersätze mit dem Modell berechnet werden und diese Lösungen im Experiment überprüft werden. Das Aufstellen dieser Modelle in Zusammenarbeit mit den Wissenschaftlern der speziellen Fachgebiete ist, ebenso wie das Finden eines geeigneten Lösungsverfahrens für diese komplexen Modelle eine schwierige

Aufgabe. In der mathematischen Praxis dreht sich sehr viel um die Konstruktion und Analyse effizienter Algorithmen. Denn ein praxistauglicher Algorithmus muss es möglich machen, den benötigten Rechenaufwand für das mathematische Modell gering zu halten und damit innerhalb einer akzeptablen Rechenzeit eine Lösung zu finden.

Die mathematischen Modelle sind immer vereinfachte Abbildungen der realen Situationen, daher sind die Lösungen immer Näherungswerte. Wie gut oder schlecht diese Näherungen sind, hängt sehr davon ab, ob wir es mit guten oder schlechteren Modellen zu tun haben.

Mathematik in den Medien

Das Wesentliche ist für die Augen unsichtbar.

Antoine de Saint-Exupéry

Wir alle werden in der Schule mit der Mathematik bekannt gemacht und unsere technisierte Welt ist voller Gegenstände, die ohne Mathematik nicht funktionieren würden. Viele Methoden der Mathematik spielen für unseren Alltag eine Rolle. Mit mathematischen Modellen wird die Wirksamkeit von Arzneimitteldosen berechnet, die Wettervorhersage sowie das Wähler- und Konsumverhalten simuliert oder Spiele programmiert. Mathematik ist überall präsent und dennoch ist sie seltsam unauffällig, ja in unserer Alltagswelt fast unsichtbar. Nur sporadisch tauchen mathematische Meldungen in den Massenmedien auf, so wie etwa die zwei spektakulärsten Meldungen der letzten 15 Jahre, die Beweise des Fermatschen Satz und der Poincaré-Vermutung. An ihrer Lösung hatten sich immerhin schon Generationen von Mathematikerinnen und Mathematikern versucht.

Aufmerksamkeit bekommt die Mathematik nur, wenn sie Kurioses zu berichten hat. Zwischen 1934 und heute hat sich da nicht viel verändert, wie das folgende Beispiel zeigt, das dem Buch »Die Musik der Primzahlen« von Marais du Sautay entnommen ist.

Das mathematische Lieblingsproblem der Mathematikerin Julia Robinson (1919–1985) bestand in ihrer Jugend darin, große Zahlen in Primzahlblöcke zu zerlegen. Sie hatte sich den folgenden Zeitungsausschnitt ihr Leben lang aufgehoben:

»Größte Primzahl gefunden, doch niemand ist daran interessiert: Dr. Samuel I. Krieger verbrauchte sechs Bleistifte, 72 Seiten gewöhnliches Schreibpapier und ein dickes Bündel Nerven, bevor er heute die größte bekannte Primzahl bekanntgeben konnte: 231 584 178 474 632 390 847 141 970 017 375 815 706 539 969 331 281 128 078 915 826 259 279 871. Er konnte jedoch nicht sagen, wen so etwas interessiert.«

Marais du Sautay merkt dazu ironisch an, das fehlende Interesse beruhe vielleicht auf der Tatsache, dass die Zahl tatsächlich durch 47 teilbar ist. Das heißt, diese Zahl ist keine Primzahl, und die Meldung hat dadurch einen irreführenden Informationsgehalt.

Auch heute ist es so, dass mathematische Neuigkeiten nur sehr selten in die Medien gelangen; danach verschwinden sie wieder sang- und klanglos in der unscheinbaren Expertenwelt. Warum haben es mathematische Themen so schwer in den Medien? Wenn Mathematik oder Mathematikerinnen und Mathematiker in den Medien erwähnt werden, werden sie oft glorifiziert. Jede Schülerin und jeder Schüler, der einen Mathewettbewerb gewinnt, ist ein Genie. Wird der Matheunterricht erwähnt, dann ist er öde und langweilig, außer selbstverständlich für die kleinen Genies. Aber die bräuchten eigentlich gar keinen Unterricht, schließlich leben sie mit ihrem angeborenen Talent. Das ist die Sicht der Medien auf den Mathematikunterricht in der Schule.

Obwohl sich die Massenmedien überdurchschnittlich für das Außergewöhnliche, Exzentrische oder Prominente interessieren, sorgt im Fall der Mathematik die elitäre Aura, von der sie umgeben ist, für die Unsichtbarkeit in den Medien und damit in unserer alltäglichen Wahrnehmung. Zum einen liegt das an ihren Vermittlungsproblemen: Die komplexen Aufgabenstellungen lassen sich sehr schwer allgemeinverständlich erklären. Aber auch unser kulturelles Umfeld trägt seinen Teil dazu bei. In der zeitgenössischen europäischen Kultur kokettieren viele Menschen mit ihrer Abneigung oder ihrem vermeintlichen Unvermögen, Mathematik

zu verstehen. Nicht selten distanzieren sich Künstler oder andere Berufsgruppen von der Mathematik und sehen ihre Unfähigkeit als Teil ihrer Identität und Persönlichkeit. Kreatives Denken und logische Strenge, das passt in ihren Augen nicht zusammen.

Die Mathematik polarisiert die Menschen in unserer westlichen Gesellschaft. Noch immer wird sie entweder geliebt oder gehasst. Donal O'Shea schreibt dazu in seinem Buch »Poincarés Vermutung«: »Viele Menschen verachten Mathematik mit jener Leidenschaft, die der enttäuschten Liebe vorbehalten ist.« Manchmal erstarren die Menschen auch schon vor ganz durchschnittlichen mathematischen Leistungen. Das Wort Genie fällt im Zusammenhang mit der Mathematik sehr schnell. So fällt es vielen Menschen leicht, mit einer »Matheschwäche« zu kokettieren, während Menschen mit einer Rechtschreibschwäche diese eher verstecken.

Das Image der Mathematik

Nur sehr langsam ändert sich das Image der Mathematik, und leider wird es noch eine Weile dauern, ehe die breite Bevölkerung anerkennt, wie lebenswichtig und vielfältig Mathematik ist. Nach Auffassung vieler Menschen ist die Mathematik zwar ein wichtiges Schulfach, gilt jedoch auch als sehr trocken. Dass sie für die Entwicklung der Kinder, für ihre Kreativität oder gar für das Leben generell bedeutend sein könnte, wird ihr oft abgesprochen. Dabei sind Mathematik und Lernen fürs Leben keine Gegensätze, die sich ausschließen. Das Festhalten am traditionellen Schulunterricht hat dazu beigetragen, dass sich das Image von der lebensfernen, trockenen oder gar unweiblichen Mathematik bis in die heutige Zeit hält – selbst in Zeiten, in denen es beispielsweise längst möglich ist, im Unterricht mathematische Experimente am Computer zu simulieren oder Sachverhalte grafisch und damit visuell und einprägsam darzustellen. In der Schule werden die Theorien in einer komprimierten, vollkommenen Form übermittelt. Vorformulierte Problem- und Aufgabenstellungen verlangen die mechanische Anwendung des gerade Gelernten. Alle unwesentlichen, unscharfen Zusammenhänge werden entfernt, serviert wird den Schülern das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses. Die Bedeutungen der Aussagen sind daher nicht mehr auf Anhieb

zu erkennen. So lernen die Schülerinnen und Schüler eine sterile Mathematik kennen, die es so als Wissenschaft nicht gibt, denn dort ist die Formulierung der mathematischen Problemstellung aus der praktischen Aufgabenstellung ein Schwerpunkt, manchmal sogar der Hauptumfang der Problemlösung.

Von den Hochschulen geht seit den letzten beiden Jahrzehnten das Bemühen aus, das Image der Mathematik zu verbessern. Da jedoch Jahrhunderte lang die pädagogischen Aspekte der mathematischen Wissensvermittlung vernachlässigt wurden, ist es schwer, auf breiter Basis die eingefahrenen Wege und Traditionen zu verlassen. Die meisten Mathematiker wünschen sich mehr Aufmerksamkeit für ihr Fachgebiet, das sie oft mit Begeisterung betreiben. Die Methoden des zeitgenössischen »Infotainments« passen jedoch nicht zu einem Fach, das so viel Entschlusskraft und Zielstrebigkeit von den Studierenden verlangt. Die Mathematik ist nicht dazu geeignet, sie einfach und nebenbei zu konsumieren, auch wenn die Infotainment-Mathematiker noch so laut »Mathe macht Spaß! Mathe ist sexy!« rufen. Um die Schönheit der Mathematik sehen zu können, muss man ihr nahe kommen und sich mit ihr beschäftigen. Die Erlebnismathematik, die in Ausstellungen wie »Mathematik zu Anfassen« geboten wird, ruft zwar ein Aha-Erlebnis hervor, weil sie mathematische Aufgabenstellungen sinnlich präsentiert, aber wenn dieser Aha-Moment vorbei ist, fühlt man sich doch wieder wie in einer Zauberaufführung. Denn wenn das sinnliche Erleben nicht in Bezug zu den abstrakten, mathematischen Gedanken gesetzt werden kann, steht man ähnlich hilflos da wie beim auswendig gelernten Gebrauch von Formeln. Mathematik ist ihrem Wesen nach Abstraktion, schon deswegen ist es angebracht, sehr vorsichtig mit Veranschaulichungen umzugehen. Wichtig wäre für unsere Gesellschaft und damit auch für unsere Kultur, dass die mathematischen Fähigkeiten auf eine solide Basis gestellt und wieder als umfassender Teil unserer Allgemeinbildung begriffen werden.

Es ist daher sehr wünschenswert, dass unsere Gesellschaft die Mathematikerinnen und Mathematiker als »Querdenker« kennen lernt, wie es Neunzert und Rosenberger in ihrem Buch »Oh Gott, Mathematik!« beschreiben: Als Denker, die einen Ideentransfer ermöglichen, der zu

Innovationen und Kreativität führt. Die Mathematik versucht, die Aufgabenstellungen aus den unterschiedlichsten Gebieten zu lösen und dazu eine mathematische Problemstellung zu formulieren. Dadurch sind die Mathematiker in der Lage, Brücken zwischen den einzelnen Wissenschaften zu schlagen und so den Ideentransfer einzuleiten.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels sollen einige interessante Aktionen zusammengestellt werden, die die Intention haben, das Image der Mathematik in der Öffentlichkeit zu verbessern:

Die Mathematik-Olympiade

Die Mathematik-Olympiade ist eine Veranstaltung, die tatsächlich einer breiteren Bevölkerungsschicht bekannt ist. Allerdings findet sie im schulischen Umfeld statt. Wie bei einem sportlichen Ereignis treten die Schülerinnen und Schüler verschiedener Schulen in einem Wettstreit gegeneinander an. Ziel des sportlichen Geisteswettstreites ist es, die Schüler für die Mathematik zu interessieren, besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler zusätzlich zu fördern und die Verbindung zwischen Schulen und Universitäten in der Mathematik zu stärken. Gleichzeitig soll für ein Studium der Mathematik geworben werden.

Der Pi-Tag

Der 14. 3. ist der Pi-Tag. Die amerikanische Schreibweise 3.14 dieses Tages erinnert an die Kreiszahl Pi. So haben findige Freunde dieser ungewöhnlichen Zahl diesen Tag zu ihrer Feier erkoren.

2008 – das Jahr der Mathematik

Mathematik in ihrer Vielfalt sichtbar werden lassen und dabei die Überraschungen und Abenteuer, die in ihr stecken, zeigen – das ist das Ziel des Jahres der Mathematik, welches 2008 vom Bundesministerium für Bildung und Forschung ausgerufen wird. Mit Veranstaltungen, Ausstellungen, Wettbewerben und Filmen wird auf die lebendige Mathematik aufmerksam gemacht. Mit diesem Buch soll ebenfalls ein kleiner Beitrag zu diesem Ziel beigetragen werden, um die Leserinnen und Leser für die Kultur der Mathematik und des Rechnens zu interessieren.

Mathematik in der Literatur

Dass sich die Menschen durchaus für Mathematik und Mathematiker interessieren, zeigt der Erfolg des Buches »Die Vermessung der Welt« von Daniel Kehlmann, in dem dieser die Lebensläufe des Mathematikers Carl Friedrich Gauß und des Naturforschers Alexander von Humboldt als Vorlage für seine Romanhandlung verwendet hat.

Eine Kolumne zur Mathematik erschien zwischen 2003 und 2005 in der Zeitschrift »Welt« unter dem Namen *Fünf Minuten Mathematik*.

Etwa acht Seiten umfasst ein Essay von Hans Magnus Enzensberger zum Stellenwert der Mathematik in unserem Kulturraum, den er sehr treffend »Zugbrücke außer Betrieb« genannt hat. Er schreibt darin z. B. über einen kulturellen »time lag«:

»Das allgemeine Bewusstsein ist hinter der Forschung um Jahrhunderte zurückgeblieben, ja man kann kaltblütig feststellen, dass große Teile der Bevölkerung über den Stand der griechischen Mathematik nie hinausgekommen sind. Ein vergleichbarer Rückstand auf anderen Feldern, etwa der Medizin oder der Physik, wäre vermutlich lebensgefährlich.«

Der Autorin dieses Buches spricht Enzensberger aus der Seele, wenn er weiter schreibt:

»Das kulturelle Paradox, mit dem wir es zu tun haben, ließe sich noch weiter zuspitzen. Man kann nämlich mit gutem Grund der Ansicht sein, dass wir in einem goldenen Zeitalter der Mathematik leben. Jedenfalls sind die zeitgenössischen Leistungen auf diesem Feld sensationell.«

Dennoch bleibt die Vermittlung der mathematischen Wissenschaft und ihrer Schönheit eine besondere Herausforderung. Um der Mathematik in den Medien zu mehr Aufmerksamkeit zu verhelfen, verleiht die Deutsche Mathematiker-Vereinigung alle zwei Jahre Medienpreise für besondere Verdienste um die Darstellung der Mathematik in der Öffentlichkeit. Im November 2006 wurde dem Schriftsteller, Lyriker und Essayisten Hans Magnus Enzensberger eine besondere und außergewöhnliche Ehre zuteil: Ein mathematisches Objekt von besonderer Schönheit – eine Fläche mit sechs Spitzen – wurde nach ihm der »Enzensberger-Stern« benannt.

Webtipps

<http://www.mathe.tu-freiberg.de>

»Die Mathematik im Jenseits der Kultur«, ein Essay von H. M. Enzensberger

Literatur

Marcus du Sautoy: »Die Musik der Primzahlen«

ISBN: 978-3-423-34299-5

Daniel Kehlmann: »Die Vermessung der Welt«

ISBN: 978-3-498-03528-0

Ein Bestseller über das Leben des Mathematikers Carl Friedrich Gauß und des Naturforschers Alexander von Humboldt

Filme

Der Beweis – Liebe zwischen Genie und Wahnsinn ist ein Film des britischen Regisseurs John Madden aus dem Jahr 2005. Das Drama basiert auf dem gleichnamigen Theaterstück von David Auburn.

A Beautiful Mind – Genie und Wahnsinn ist ein US-amerikanischer Kinofilm aus dem Jahr 2001. Er skizziert die reale Lebensgeschichte des hochbegabten Mathematikers John Forbes Nash.

PI – Der Film ist ein experimenteller Science-Fiction-Thriller aus dem Jahr 1998 von Darren Aronofsky. Er handelt von dem Mathematiker Maximilian Cohen, der glaubt, dass alles in der Natur anhand von Zahlen verstanden werden kann.

Aktuelle Highlights der Mathematik

Man kann nämlich mit gutem Grund der Ansicht sein, daß wir in einem goldenen Zeitalter der Mathematik leben.

Hans Magnus Enzensberger

Die beiden spektakulärsten Ereignisse der letzten Jahre, die den Weg bis in die Abendnachrichten schafften, waren die Beweise der Sätze von Fermat und Poincaré.

Beweis des Satzes von Fermat

»Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.«

Pierre de Fermat

Eines der letzten großen Medienereignisse der Mathematik fand im Juni 1993 statt, als der englische Mathematiker Andrew Wiles in Cambridge den Beweis des Satzes von Fermat erbrachte. Es war eine der wenigen Gelegenheiten, bei denen die Sektkorken knallten und die Kameras blitzen, als Wiles die 1637 aufgestellte Vermutung von Pierre de Fermat bewies, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösungen für ganzzahlige n größer als 2 besitzt. Die berühmte Randnotiz des französischen Mathematikers aus dem Jahre 1637 lautete: *»Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.«* Die Geschichte des Beweises dieses Satzes umfasst wesentliche Teile der Mathematik der vergangenen Jahrhunderte. Denn diese Notiz beschäftigte bis zu ihrem Beweis 1993 Generationen von Mathematikern. Es war ein langer und steiniger Weg bis dorthin, und viele große Mathematikerinnen und Mathematiker hinterließen ihre Spuren auf diesem Weg. Zunächst wurden Spezialfälle bewiesen. Der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler bewies um 1750 den Satz für die Fälle $n=3$ und $n=4$. 1825 konnten der deutsche Mathematiker Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und der französische Mathematiker Adrien-Marie Legendre den Satz für $n=5$ beweisen. Sie stützten sich dabei auf die Vorarbeit der französi-

schen Mathematikerin Sophie Germain. Als der deutsche Mathematiker Paul Friedrich Wolfskehl in seinem Testament einen hohen Preis für den Beweis auslobte, war das Rennen, wer zuerst die Fermatsche Vermutung beweisen konnte, nun zusätzlich materiell motiviert. Als 1993 Andrew Wiles den Satz in Zusammenarbeit mit Richard Taylor endlich bewies, benötigte er dazu Konstruktionen aus vielen Bereichen der Mathematik und die modernsten Ergebnisse der Zahlentheorie.

Poincarés Vermutung

*Ich bin nicht geübt darin, linear zu reden,
also werde ich die Klarheit der Lebendigkeit opfern.*

Gregori Perelman

Seit diesem Tag gab es in der Mathematik nur noch ein Medienereignis, das bis in die internationalen Abendnachrichten gelangt ist. Im Sommer 2006 sollte der russische Mathematiker Grigorij Perelman zusammen mit drei anderen Kollegen die Fields-Medaille bekommen, die er jedoch ablehnte. Die Fields-Medaille wird oft als der »Nobelpreis für Mathematiker« bezeichnet. Im November 2002 stellte Grigori Perelman einen Artikel ins Internet, und nach einiger Zeit wurde immer mehr Mathematikern klar, dass er die berühmte Poincaré-Vermutung bewiesen hatte, die der französische Mathematiker Henri Poincaré (1854–1912) 1904 aufstellte. Die Überprüfung dieses Beweises dauerte mehrere Jahre. An diesem Beispiel erkennt man, dass es tatsächlich Wissensgebiete innerhalb der Mathematik gibt, die sich im Wesentlichen weit abseits des Mainstreams in den Köpfen einiger Eingeweihter abspielen.

Bei Donal O'Shea heißt es, die Poincarésche Vermutung ist eine mutige Annahme über nichts geringeres als die mögliche Form unseres Universums. Sie ist ein Problem der Topologie, ein Unterthema der Geometrie. Die Vermutung bezieht sich darauf, dass eine bestimmte topologische Eigenschaft schon den topologischen Typ von geschlossenen Mannigfaltigkeiten festlegt. Die Mannigfaltigkeiten kann man sich als eine bestimmte Art von Flächen vorstellen. Eine schöne, praktische Erläuterung findet sich auf der Homepage der Universität Magdeburg. Hier wird versucht, das

Problem anhand eines alltäglichen Beispiels zu erläutern, nämlich damit, wie man sein Fahrrad an einem Hindernis ankettet. Auch dabei stellt man sich die Frage, ob man die Kette ohne un stetige Deformation, das wäre in diesem Fall das Aufbrechen der Kette, wieder entfernen kann.

Infobox – Aktuelle Highlights der Mathematik

Webtipps

<http://www.zeit.de/online/2006/34/Fields-Medaille-Verleihung>

Artikel der Wochenzeitung »Die Zeit« zur Verleihung der Fields-Medaille an den russischen Mathematiker Perelman

Literatur

Donal O'Shea: »Poincarés Vermutung«

ISBN: 978-3-10-054020-1

Das Buch erklärt die mathematischen Hintergründe der Poincaréschen Vermutung und den Weg der verschiedenen Lösungsansätze bis hin zur Lösung des Problems durch Grigorij Perelman.

Simon Singh: »Fermats letzter Satz«

ISBN: 978-342-333052-7

Das Buch ist eine lebendige Erklärung der Arbeit Andrew Wiles' und erzählt die 350-jährige Geschichte von Fermats letztem Satz.

Anwendungsgebiete der Mathematik

Die angewandte Mathematik versucht, Naturphänomene zu beschreiben, indem sie mathematische Modelle verwendet. Beispiele dafür sind die Klimamodelle und Wettervorhersagen. Mathematische Modellierung und numerische Simulation werden bei sehr unterschiedlichen Problemstellungen angewandt. So werden damit z. B. die Vorgänge bei der Erstarrung von Metallschmelzen ergründet, Crash-Test-Simulationen von Unfällen untersucht oder die Vorherbestimmung einer möglichen Ausbreitung von Krankheiten durchgeführt. Ein anschauliches Beispiel der angewandten Mathematik aus dem Bereich der Verkehrsplanung ist die Arbeit des Darmstädter Mathematikers Armin Fügenschuh. Dieser stimmt Schulbusfahrpläne mit den Unterrichtszeiten der Schulen ab. Er hat ein Programm entwickelt, mit dem der Unterrichtsbeginn an den Schulen eines Landkreises so aufeinander abgestimmt werden kann, dass weniger Schulbusse eingesetzt werden müssen.

Die meisten dieser mathematischen Modelle sind Optimierungsaufgaben, also Aufgaben, die den Nullstellenberechnungen eines Graphen entsprechen. Allerdings sind diese Modelle etwas komplizierter. Die Lösungsstrategie jedoch ähnelt den Aufgaben, die wir aus der Schule kennen.

Mathematik in der Wirtschaft – das Problem des Handlungsreisenden und anderes

Ein Gebiet, auf dem die Mathematik von Anfang an viel geleistet hat und dem sie ihre Weiterentwicklung verdankt, ist das Wirtschaftsleben, die Ökonomie. Schon in den Anfängen ging es um das Zählen des Besitzes und der Besitztümer. Ob nun Tiere gezählt oder Land vermessen und aufgeteilt wurde, die mengenorientierte Anwendung der Mathematik wirkte anfangs als große Motivation, um gerechte Rechentechniken zu entwickeln. Noch heute sind schnelle und gute Algorithmen, wie Arbeitskräfte und Kapital, eine berechenbare Ressource, solange sie vernünftig eingesetzt wird.

Viele Problemstellungen des wirtschaftswissenschaftlichen Bereichs sind sogenannte Optimierungsaufgaben. Lösungsstrategien für diese

Aufgaben zu finden bleibt eine Herausforderung. Ein berühmtes Beispiel für das Problem des Handlungsreisenden, eine optimale Reiseroute zu finden, ist auch Laien unter dem historischen Begriff »Königsberger Brückenproblem« bekannt. Bei dieser speziellen Aufgabenstellung ging es darum, einen Weg für den Sonntagsspaziergang in Königsberg zu finden, der über alle sieben Brücken führt, dabei sollte aber jede Brücke nur einmal überquert werden. Vor fast 300 Jahren zeigte der deutsche Mathematiker Euler, dass dies unmöglich ist. Er begründete damit die Graphentheorie. Sie ist eine wichtige Disziplin der Mathematik geworden, die auch heute noch bei der Ausarbeitung optimaler Fahrtrouten, Einsatzplänen von Material und Personal usw. zu Einsatz kommt.

Die Mathematik des Sozialverhaltens

Mit zunehmendem Fortschritt der Mathematik würde die gerechte Lösung eines Streits nicht mehr durch das Ermessen eines Richters gefunden, sondern ausgerechnet werden – so lässt sich die Vision des Universalgelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz zusammenfassen, von der wir heute jedoch noch weit entfernt sind.

Über den Erfolg beim Einsatz der Mathematik in den Wirtschaftswissenschaften kamen die Forscher auf die Idee, auch das soziale Verhalten der Menschen zu untersuchen. Fairness und Kooperation wurden mit mathematischen Methoden untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass der Mensch nicht nur seinen eigenen Vorteil anstrebt. Er strebt oft nach einem gerechten Anteil. Die Forscher sind sich einig, dass es sich dabei um eine Verhaltensweise handelt, die in unserer Evolution begründet liegt. Sie ist also nicht Teil unserer kulturellen Erfahrung, allerdings ist der Maßstab, nach dem wir Fairness und Gerechtigkeit bewerten, kulturell abhängig.

Mathematik im Zitat

Es ist immer wieder ein Erlebnis, die Mathematik mit den Augen der Menschen zu sehen, die so ungeheuer fasziniert von ihr waren und sind. Zitate von Mathematikern – und manchmal auch Mathematikerinnen – lassen uns für einen kurzen Moment erahnen, was in ihren Köpfen vorgeht, wenn sie sich in diese abstrakte Welt hineinbegeben. Um die Leserinnen und Leser an diesen wertvollen Augenblicken teilhaben zu lassen, wird dieses Buch der mathematischen Inspirationen mit einer Auswahl von Zitaten über und von Mathematikerinnen und Mathematikern beendet.

Zitate über Mathematiker und über das mathematische Denken

»Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.« – *Johann Wolfgang von Goethe*

»Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.« – *Johann Wolfgang von Goethe*

»Der echte Mathematiker ist Enthusiast per se. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.« – *Novalis (Friedrich von Hardenberg)*

»Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse.« – *Bertolt Brecht*

»Kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, daß er selbst denkt.« – *M. Eminescij*

»Ein für den Wissenserwerb verbrachter Tag ist Gott lieber als 100 Kriege für Gott.« – *Muhammed (570–632 n. Chr.)*

Zitate von Mathematikerinnen und Mathematikern

»Alles im Leben erscheint mir so verblasst und uninteressant. In solchen Augenblicken taugt die Mathematik besser; man freut sich, dass eine Welt so ganz außerhalb unserer selbst existiert.« – *Sofja Kowalewskaja*

»Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.« – *Paul Möbius*

»In Mathe war ich immer schlecht.« – *Albrecht Beutelspacher, Buchtitel, 1996*

»In Wirklichkeit ist sie (die Mathematik) aber eine Wissenschaft, die die größte Phantasie verlangt.« – *Sofja Kowalewskaja*

»Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.« – *Bertrand Russell*

»Mathematik steht den Frauen gut.« – *Rudolf Taschner zum Girls' Day 2007*

»Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt.« – *David Hilbert*

»Alles was lediglich wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch.« – *Descartes*

»Mathe ist wie Liebe: Eine einfache Idee, aber sie kann kompliziert werden.« – *R. Drabek*

»Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.« – *David Hilbert*

»Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.« – *Leopold Kronecker*

»Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.« – *Carl Friederich Gauß*

»Ein Tropfen Liebe ist mehr als ein Ozean Verstand.« – *Blaise Pascal*

Anhang

Der Anhang hält für die Leserinnen und Leser dieses Buches einige ergänzende Informationen bereit.

Glossar

Algorithmus: Ein Algorithmus ist eine definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines bestimmten Problems in endlich vielen Schritten. Den ersten Algorithmus für einen Computer entwickelte 1842 die britische Mathematikerin Ada Lovelace (1815–1852).

Axiom: Als Axiom oder Grundsatz bezeichnet man einen ursprünglichen, unbeweisbaren Satz. Das Axiom ist die Grundlage für die Beweise eines Gebietes.

Differentialrechnung oder Differentialgleichungen: Die Veränderung von Größen gehen in diese Rechnungen mit ein. Sie spielen auch in der Physik eine große Rolle. Ein Beispiel ist die Beschleunigung, sie ist die Ableitung, das Differential der Geschwindigkeit zur Zeit.

Fields-Medaille: Sie wird oft als der »Nobelpreis für Mathematiker« bezeichnet. Nur Mathematikerinnen und Mathematiker unter 40 Jahren können sie erhalten.

Formel: Sie drückt in der Mathematik auf kurze, prägnante Art und Weise ein mathematisches Gesetz oder einen mathematischen Zusammenhang aus.

Irrationale Zahl: Eine reelle Zahl, die *nicht* als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann.

Knochen von Ishango: Er gilt als das älteste Fundstück, das auf eine mathematische Tätigkeit der Menschen hinweist. Er wird im Königlichen Institut für Naturwissenschaften in Brüssel aufbewahrt und wurde 1935 in der heutigen Demokratischen Republik Kongo nahe der Grenze zu

Uganda gefunden. Die Datierung des Knochens liegt zwischen 20000 und 30000 v. Chr.

Mathematischer Beweis: Der formal korrekte Nachweis, dass aus einer Menge von Aussagen und Axiomen eine weitere Aussage folgt.

Mathematisches Modell: Eine reale Situation wird zur Bearbeitung in mathematischen Formeln beschrieben. Es besteht aus Gleichungen oder Gleichungssystemen, in die Kenngrößen eingearbeitet werden, die die Prozesse beeinflussen oder steuern.

Natürliche Zahlen: Die beim Zählen verwendeten Zahlen, z. B. 1, 2, 3, 4, 5 usw. Jede natürliche Zahl hat eine nachfolgende Zahl.

Negative Zahl: Eine Zahl, die kleiner ist als Null. (Die Null ist weder positiv noch negativ.)

Primzahl: Eine natürliche Zahl, die nur durch eins und durch sich selbst teilbar ist. Die Primzahlen beginnen mit 2, 3, 5, 7, 11 usw.

Rationale Zahl: Eine Zahl, die als Verhältnis (Bruch) zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann.

Reelle Zahl: Eine Zahl, die sich als (unendliche oder abbrechende) Dezimalzahl darstellen lässt.

Statistik: Die mathematische Statistik beschäftigt sich mit der Analyse von Daten unter der Zuhilfenahme von mathematischen Modellen.

Wahrscheinlichkeit: Sie ist eine Einstufung von Aussagen und Urteilen nach dem Grad der Sicherheit ihres Eintretens.

Mathematischer Anhang

Historischer Widerspruchsbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Dieser Widerspruchsbeweis von Aristoteles wurde in dem Werk »Methaphysik« beschrieben:

Angenommen $\sqrt{2}$ sei rational, also als Quotient zweier natürlicher Zahlen ausdrückbar, wobei n und k teilerfremd sind (sie entsprechen einem gekürzten Bruch)

$$\sqrt{2} = \frac{n}{k}$$

wobei n und k natürliche Zahlen sind. Durch Quadrieren der Gleichung erhalten wir:

$$2 = \frac{n^2}{k^2} \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$$

Folglich ist n^2 eine gerade Zahl. Da die Wurzel aus einer geraden Quadratzahl auch gerade ist (Satz 4), ist n selbst gerade. Also ist $n/2$ eine natürliche Zahl. Nun formen wir die letzte Gleichung um:

$$k^2 = \frac{n^2}{2} = 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Das zeigt, dass k^2 und somit auch k gerade natürliche Zahlen sind. n und k sind also gerade und haben somit beide den Teiler 2. Damit sind n und k nicht teilerfremd – im Widerspruch zu der Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational. Also ist diese Annahme falsch.

Satz von Fermat

Der Jahrhunderte lang als Fermatsche Vermutung bekannte Satz von Fermat besagt, dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

für ganzzahlige a , b , c ungleich 0 und natürliche Zahlen n größer als 2 keine Lösung besitzt.

Poincaré-Vermutung

Die vereinfachte Beschreibung der Poincaré-Vermutung aus Wikipedia:

Die Oberfläche einer Kugel ist 2-dimensional, beschränkt, randlos und jede geschlossene Kurve lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen, welcher auch auf der Kugel liegt. Sie ist auch das einzige 2-dimensionale Gebilde mit diesen Eigenschaften. Bei der Poincaré-Vermutung geht es um das 3-dimensionale Analogon, nämlich um eine 3-dimensionale »Oberfläche« auf einem 4-dimensionalen Körper.

Danksagung

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Johanna Thompson für die Abdruckgenehmigung ihres Bildes »Multiverses« aus ihrer Universes-Serie auf dem Cover. Die »pocketsized universes« sind in ihrem englischsprachigen Projektblog »universes« unter der Internetadresse <http://universesforall.blogspot.com> zu finden.